

**ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

БЕЗМЕНОВ В.М.

КОСМИЧЕСКАЯ ФОТОГРАММЕТРИЯ

Лабораторные работы

Часть 1

Казань 2008

Печатается по решению Редакционно-издательского совета физического факультета КГУ.

УДК 528.72

Методические указания разработаны в соответствии с программой курса «Космическая фотограмметрия».

В методическом указании даны расчетные работы по ряду вопросов, рассматриваемых в курсе космической фотограмметрии. Приводятся теоретические основы аппарата алгебры кватернионов и проективной геометрии, основные зависимости, которых используются при выполнении лабораторных работ.

Рецензент: доцент, к.ф.-м.н Боровских В.С.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Теоретические основы алгебры кватернионов	5
Введение	5
1.1. Система обозначений и определения	6
1.2. Умножение кватернионов и матрицы	14
1.3. Представление элементов матрицы вращения через компоненты кватерниона	17
1.4. Случайные кватернионы	18
1.5. Кватернионы и вращение векторов	19
1.6.Связь параметров кватерниона с угловыми элементами ориентирования аэрокосмического снимка	22
1.7. Прямой способ определения угловых элементов ориентирования аэрокосмического снимка	25
Литература	26
2. Теоретические основы проективной геометрии	28
Введение	28
2.1. Группа проективных преобразований	28
2.2. Проективное пространство и проективная плоскость	32
2.3 Однородные координаты	37
2.4. Двойное отношение	41
2.5. Проективные координаты	48
2.6. Определение сферических координат объекта с использованием векторной интерпретации проективных координат. Способ Ю.М. Трунина	56
Литература	58

Лабораторная работа –1.

Прямое определение элементов ориентирования космического снимка	59
--	----

Лабораторная работа –2.

Определение сферических координат объекта из обработки снимка звездного неба	64
---	----

1. Теоретические основы алгебры кватернионов

Введение

Необходимость расширения операций трехмерной векторной алгебры до операций умножения и деления привела Гамильтона (1843 г.) к созданию системы кватернионов. Кватернионы были незаслуженно забыты и до 60-х годов XX столетия практически не использовались. С середины 60-х годов того же столетия кватернионы начинают применять в аналитической фотограмметрии и других прикладных науках. Среди отечественных учёных, уделивших достойное внимание применению кватернионов в фотограмметрии, космической фотограмметрии и геодезии следует отметить М.С. Урмаева, М.И. Щербакова, Л.И. Араманович.

Выдающийся учёный, профессор М.С. Урмаев в своём учебнике по космической фотограмметрии, в частности, отмечает: «В настоящее время кватернионное исчисление является составной частью математического аппарата современной космической фотограмметрии и космической геодезии».

Общепризнанным можно считать эффективность решения задач, связанных с композициями вращений пространства, при помощи кватернионов. Применение кватернионов имеет ряд несомненных преимуществ по сравнению с описанием вращений при помощи эйлеровых углов, поскольку они (кватернионы) дают возможность получить сразу координаты вектора в новой системе координат при повороте пространства на угол Θ вокруг некоторой инвариантной оси \vec{c}^0 .

Говоря об эффективности использования кватернионов при описании вращений, будет уместным отметить и тот факт, что именно кватернионы интенсивно используются в современной компьютерной графике, в частности, в компьютерных играх.

1.1. Система обозначений и определения

Существует несколько систем обозначений в записи кватернионов. Наиболее удачной следует считать систему, используемую Л.И. Араманович, которой мы и будем придерживаться.

Под кватернионом понимают гиперкомплексное число, геометрически реализуемое в четырёхмерном пространстве.

Число, составленное из действительной единицы 1 и трёх мнимых единиц с действительными элементами следующего вида:

$$A = a_0 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k, \quad (1.1)$$

где a_0, a_1, a_2, a_3 есть любые реальные числа и i, j, k три мнимые единицы называется кватернионом. В отношении обозначения мнимых единиц следует отметить, что Гамильтон их так же обозначал через i, j, k . Далее, кватернион A будем записывать так

$$A = (a_0, a_1, a_2, a_3) = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \quad . \quad (1.2)$$

Число a_0 называется реальной (или скалярной) частью кватерниона A , которую будем обозначать через $\text{Re } A$ ($\text{Re } A = a_0$). Сумма всех остальных членов называется мнимой (или векторной) частью кватерниона A , которую будем обозначать через $\text{Im } A$ ($\text{Im } A = a_1 i + a_2 j + a_3 k$).

Мнимые единицы i, j, k можно идентифицировать с базисными векторами некоторой 3-х мерной референцной системы координат S . Поэтому, величины a_1, a_2, a_3 можно рассматривать как координаты

некоторого вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$ в системе S . С учётом этих обозначений кватернион A запишется в виде

$$A = a_0 + \vec{a}. \quad (1.3)$$

С другой стороны, любой вектор $\vec{r}_S = (r_1, r_2, r_3)^T$ в системе координат S может быть ассоциирован с мнимым кватернионом $r_S = r_1i + r_2j + r_3k$. Данное обстоятельство весьма важно и будет использоваться в дальнейшем при рассмотрении отдельных вопросов фотограмметрии. Отметим, вектор и соответствующий ему кватернион обозначены одной буквой - r . Отличие в том, что у кватерниона отсутствует знак присущий обозначению векторов.

Коэффициенты кватерниона A могут быть не только скалярами, но и функциями. Например, если коэффициенты кватерниона A зависят от параметра t , мы будем иметь

$$A(t) = a_0(t) + a_1(t)i + a_2(t)j + a_3(t)k. \quad (1.4)$$

Арифметические операции между кватернионами.

Изложим основные постулаты, определяющие действия над кватернионами.

1.Равенство двух кватернионов. Два кватерниона $A = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ и $B = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ равны, если равны их реальные и мнимые части, т.е. равны их элементы $a_l = b_l (l = 0, 1, 2, 3)$.

2. Сумма кватернионов. Суммой кватернионов A и B называется кватернион, элементами которого являются величины $a_l + b_l, (l = 0, 1, 2, 3)$:

$$A + B = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k. \quad (1.5)$$

С учётом представления кватерниона в виде (1.3) сумма двух кватернионов A и B запишется

$$A + B = a_0 + b_0 + \vec{a} + \vec{b}. \quad (1.6)$$

3. Умножение кватерниона на скаляр. При умножении кватерниона A на скаляр c происходит умножение на это число всех его элементов:

$$cA = ca_0 + ca_1i + ca_2j + ca_3k, \quad (1.7)$$

$$cA = ca_0 + c\vec{a}. \quad (1.8)$$

Из этих определений следует, что сложение кватернионов и умножение их на скаляр подчиняются правилам обычной алгебры (эти операции являются коммутативными, ассоциативными и дистрибутивными):

$$4. \quad A + B = B + A, \quad (A + B) + C = A + (B + C)$$

$$5. \quad cA = Ac, \quad (cd)A = A(dc); \quad (1.9)$$

$$6. \quad (c + d)A = cA + dA, \quad c(A + B) = cA + cB;$$

7. Умножение базисных единиц. В кватернионной алгебре вводятся следующие правила умножения базисных единиц:

$$\begin{aligned} ii = jj = kk = -1 \quad ik = -ki = j \\ ij = -ji = k \quad jk = -kj = i \end{aligned} \quad (1.10)$$

Правила умножения мнимых единиц достаточно легко запомнить, пользуясь хорошо известным в физике правилом буравчика. При этом следует предположить, что i, j, k являются ортами правой системы координат. Вращение оси i против часовой стрелки до совмещения с осью j будет соответствовать вкручиванию «буравчика» по направлению оси k (Рис.1.1). Этому движению соответствует умножение: $ij = k$. Выкручиванию «буравчика» -- совмещение оси j с осью i (вращение по часовой стрелке), будет соответствовать умножение: $ji = -k$. Аналогично устанавливаются оставшиеся 4 соответствия.

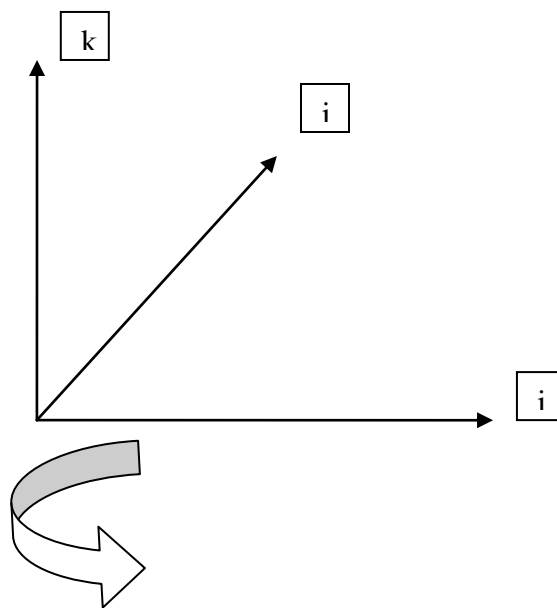


Рис. 1.1 Умножение мнимых единиц по правилу буравчика

Можно, так же, использовать следующее представление (Рис.1.2): При умножении двух единиц расположенных по стрелке, получается третья единица с плюсом; при движении в обратную сторону (против стрелки) единица берётся с минусом.

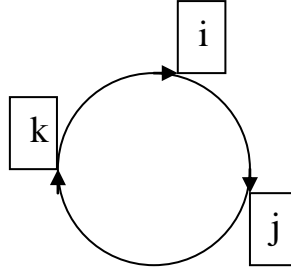


Рис. 1.2 Умножение мнимых единиц

8. Умножение двух кватернионов. Умножая два кватерниона $A = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ и $B = (b_0, b_1, b_2, b_3)$, мы получим кватернион $C = AB$, коэффициенты которого равны:

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 \\ c_1 &= a_1 b_0 + a_0 b_1 - a_3 b_2 + a_2 b_3 \\ c_2 &= a_2 b_0 + a_3 b_1 + a_0 b_2 - a_1 b_3 \\ c_3 &= a_3 b_0 - a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Данные выражения можно получить, руководствуясь соотношениями для мнимых единиц (10). С учётом выражения (3), принятого для записи кватерниона, произведение двух кватернионов A и B можно записать в следующем виде:

$$AB = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b} + a_0 \vec{b} + b_0 \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b}, \quad (1.12)$$

где $\vec{a} \cdot \vec{b}$ и $\vec{a} \times \vec{b}$ есть соответственно скалярное и векторное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} .

Умножение кватернионов обладает ассоциативными и дистрибутивными свойствами. Для любых кватернионов справедливы равенства:

$$\begin{aligned}(AB)C &= A(BC), \\ A(B+C) &= AB+AC.\end{aligned}\tag{1.13}$$

Умножение кватернионов не коммутативно, т.е. $AB \neq BA$. Очевидно, что перестановка сомножителей допустима, т.е. $AB = BA$, когда один из кватернионов есть скаляр, или когда их векторные части являются коллинеарными векторами (пропорциональны). Тем не менее, для двух произвольных кватернионов имеет место равенство:

$$\operatorname{Re}(AB) = \operatorname{Re}(BA).\tag{1.14}$$

Произведение двух кватернионов равно нулю, т.е. $AB = 0$ только тогда, когда один из сомножителей равен нулю: либо $A = 0$, либо $B = 0$.

Правила умножения кватернионов чрезвычайно удачны – благодаря им алгебра кватернионов содержит в себе алгебру действительных и комплексных чисел, а также трёхмерную векторную алгебру.

9. Сопряжённый кватернион. Кватернионом, сопряжённым данному кватерниону A , называется кватернион A^* равный:

$$A^* = a_0 - \vec{a}.\tag{1.15}$$

Для сопряжённого кватерниона A^* справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
(A^*)^* &= A, \quad A + A^* = 2\operatorname{Re} A, \\
(A + B)^* &= A^* + B^*, \quad A - A^* = 2\operatorname{Im} A, \\
(AB)^* &= B^* A^*, \quad A^* = -A, \text{ если } \operatorname{Re} A = 0.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

10. Норма кватерниона. Норма кватерниона A обозначается через $N(A)$ находится следующим образом:

$$N(A) = \|A\|^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2. \tag{1.17}$$

Норма кватерниона является действительным числом.

Кватернион называется нормированным, если его норма равна единице, т.е. $N(A) = \|A\|^2 = 1$. Для нормы кватерниона очевидны свойства:

$$\begin{aligned}
\|A\| &= 0, \text{ если } A = 0, \quad \|A\|^2 = AA^* = A^*A \\
\|A\| &= \|A^*\|, \quad \|AB\| = \|A\| \cdot \|B\|
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Величина $|A| = \sqrt{\|A\|^2}$ имеет название тензора данного кватерниона.

Очевидно, что тензор единичного кватерниона равен единице.

11. Обратный кватернион. Кватернионом обратным данному кватерниону $A \neq 0$ называется кватернион A^{-1} , для которого выполняется равенство $A^{-1}A = 1$. Для нормированного кватерниона мы имеем $A^{-1} = A^*$. Для мнимого нормированного кватерниона, т.е. для кватерниона ассоциируемого с единичным вектором, имеет место $A^{-1} = A^* = -A$.

Кватернион, обратный произведению кватернионов, находится следующим образом:

$$(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot A_{n-1}^{-1} \cdot \dots \cdot A_1^{-1}. \quad (1.19)$$

12. Тригонометрическая форма кватерниона. Любой кватернион с действительными элементами $A = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ может быть представлен в следующем виде:

$$A = |A| \cdot (\cos \alpha + \vec{e} \cdot \sin \alpha). \quad (1.20)$$

Здесь \vec{e} есть единичный вектор, направленный по вектору $\vec{a} = \text{Im} A$:

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \quad |\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \quad (1.21)$$

$$\cos \alpha = \frac{a_0}{|A|}, \quad \sin \alpha = \frac{|\vec{a}|}{|A|}, \quad 0 \leq \alpha < \pi. \quad (1.22)$$

Вектор \vec{e} называется также осью кватерниона.

Величина $(\frac{a_0}{|A|} + \frac{\vec{a}}{|A|})$ называется верзором кватерниона. Заметим, что это

– кватернион, норма которого равна единице. Очевидно, что $(\frac{a_0}{|A|} + \frac{\vec{a}}{|A|}) = (\cos \alpha + \vec{e} \cdot \sin \alpha)$.

В выражении (1.20) для кватерниона знак угла α определяется выбором направления единичного вектора \vec{e} . По сути дела, в выражениях для \vec{e} и $\sin \alpha$, следовало бы поставить знаки \pm , поскольку, пока не установлен однозначный выбор положительного

направления счёта угла α и положительного направления единичного вектора \vec{e} .

Кватернион (1.20) запишем в следующем виде:

$$A = |A| \cdot (\cos \alpha + |a|^{-1} (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \cdot \sin \alpha). \quad (1.23)$$

13. Кватернионы со специальными осями. Пусть S есть 3-х мерная, правя, ортогональная система координат с базисными векторами, идентифицируемыми с единицами (мнимыми) кватерниона.

Предположим, что A_1 есть нормированный кватернион с базисным вектором i . Тогда в соответствии с (1.20) и (1.23) будем иметь

$$A_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha \quad (1.24)$$

Аналогично, кватернионы A_2 и A_3 с осями j и k соответственно:

$$A_2 = \cos \alpha + j \sin \alpha \quad (1.25)$$

$$A_3 = \cos \alpha + k \sin \alpha$$

Угол α - произвольный параметр.

1.2. Умножение кватернионов и матрицы

Интересным представляется представление операции умножения кватернионов в матричной форме. Пусть

$$\begin{aligned} A &= a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \\ B &= b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k \end{aligned} \cdot$$

Пусть так же, вектор V_A есть 4-х мерный вектор с координатами равными коэффициентам кватерниона A , т.е. кватерниону ставим в соответствие 4-х мерный вектор $V_A = (a_0, a_1, a_2, a_3)^T$. Кватерниону B поставим в соответствие вектор $V_B = (b_0, b_1, b_2, b_3)^T$. Произведение двух кватернионов A и B даст третий кватернион: $C=AB$. Параметры этого кватерниона C вычисляются по формулам (1.11). Тем не менее, этому новому кватерниону можно поставить в соответствие свой 4-х мерный вектор, который можно определить следующим образом:

$$V_C = V_{AB} = G_1(A) \cdot V_B = G_2(B) \cdot V_A \quad (1.26)$$

Матрица $G_1(A)$ и матрица $G_2(B)$ в выражении (1.26) соответственно равны:

$$G_1(A) = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}, \quad G_2(B) = \begin{bmatrix} b_0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ b_1 & b_0 & b_3 & -b_2 \\ b_2 & -b_3 & b_0 & b_1 \\ b_3 & b_2 & -b_1 & b_0 \end{bmatrix}. \quad (1.27)$$

Для некоторого произвольного кватерниона A матрицы $G_1(A)$ и $G_2(A)$ можно представить в виде:

$$G_1(A) = \begin{pmatrix} a_0 & -\vec{a}^T \\ \vec{a} & a_0 I_3 + K(\vec{a}) \end{pmatrix}, \quad G_2(A) = \begin{pmatrix} a_0 & -\vec{a}^T \\ \vec{a} & a_0 I_3 - K(\vec{a}) \end{pmatrix}, \quad (1.28)$$

где I_3 -- единичная матрица размером 3x3,

$$K(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_1 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

Некоторые свойства матрицы $K(\vec{a})$:

$$\begin{aligned} K(\vec{a}) \cdot \vec{r} &= \vec{a} \times \vec{r}, \\ K(\vec{a}) \cdot \vec{a} &= \vec{a} \times \vec{a} = 0, \\ K^T(\vec{a}) &= -K(\vec{a}), \\ K(\vec{a})K(\vec{b}) &= \vec{b} \times \vec{a} - \vec{a}^T \cdot \vec{b} \cdot I_3. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Некоторые свойства матриц G_1 и G_2 :

$$\begin{aligned} G_q(A^*) &= G_q^T(A), q=1,2, \\ G_q(A+B) &= G_q(A) + G_q(B), q=1,2, \\ G_1(AB) &= G_1(A)G_1(B), \\ G_2(AB) &= G_2(B)G_2(A), \\ G_1(A)G_2(B) &= G_2(B)G_1(A), \\ \det G_q(A) &= \|A\|^4, q=1,2. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Лемма: Для любого кватерниона $A \neq 0$ имеют место следующие равенства:

$$G_1(A^{-1}) = G_1^{-1}(A), \quad G_2(A^{-1}) = G_2^{-1}(A) \quad (1.32)$$

Используя матрицы G_1 и G_2 можно легко заменить уравнения в кватернионах на уравнения в матрицах. В частности, для кватерниона $A = B \cdot C \cdot D$ матричная форма записи будет следующая:

$$A = G_1(B) \cdot G_2(D) \cdot \vec{c}, \quad (1.33)$$

где $\vec{c} = (c_0, c_1, c_2, c_3)^T$ -- 4-х мерный вектор, соответствующий кватерниону C .

Для очень важного в дальнейшем случая $A \cdot B \cdot A^*$ -- имеющего место при описании вращения, с учетом всего выше изложенного будем иметь:

$$V_{ABA^*} = G_1(A) \cdot G_2^T(A) \cdot V_B. \quad (1.34)$$

1.3. Представление элементов матрицы вращения через компоненты кватерниона.

Элементы матрицы вращения Π можно выразить через элементы нормированного кватерниона с нормой равной единице.

$$\begin{aligned} \Pi &= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 & 2(a_1a_2 - a_0a_3) & 2(a_1a_3 + a_0a_2) \\ 2(a_1a_2 + a_0a_3) & a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 & 2(a_2a_3 - a_0a_1) \\ 2(a_1a_3 - a_0a_2) & 2(a_2a_3 + a_0a_1) & a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Данная форма представления матрицы Π называется родригесовой формой ортогональной матрицы, а сама матрица Π – матрица Родригеса, которую в кватернионной алгебре принято обозначать через $G_0(A)$:

$$G_0(A) = \begin{bmatrix} a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 & 2(a_1a_2 - a_0a_3) & 2(a_1a_3 + a_0a_2) \\ 2(a_1a_2 + a_0a_3) & a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 & 2(a_2a_3 - a_0a_1) \\ 2(a_1a_3 - a_0a_2) & 2(a_2a_3 + a_0a_1) & a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 \end{bmatrix}. \quad (1.36)$$

1.4. Случайные кватернионы

Случайные кватернионы являются наиболее важными в приложениях, связанных с измерениями, «шумами» в теории контроля и т.д.

Допустим $A = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ есть кватернион со случайно изменяемыми коэффициентами a_0, a_1, a_2, a_3 ; i, j, k – являются мнимыми единицами как и прежде. Кватернион A называется в этом случае случайным кватернионом.

Среднее значение $E[A]$ (математическое ожидание) случайного кватерниона A есть:

$$E[A] = E[a_0] + E[a_1] \cdot i + E[a_2] \cdot j + E[a_3] \cdot k. \quad (1.37)$$

Для случайного кватерниона существует ковариационная матрица, которая определяется следующим образом:

$$C[A] = \begin{pmatrix} c_{11}[A] & c_{12}[A] & c_{13}[A] & c_{14}[A] \\ c_{21}[A] & c_{22}[A] & c_{23}[A] & c_{24}[A] \\ c_{31}[A] & c_{32}[A] & c_{33}[A] & c_{34}[A] \\ c_{41}[A] & c_{42}[A] & c_{43}[A] & c_{44}[A] \end{pmatrix}, \quad (1.38)$$

где

$$c_{lp}[A] = E[(a_{l-1} - E[a_{l-1}])(a_{p-1} - E[a_{p-1}])], \quad l, p = 1, 2, 3, 4. \quad (1.39)$$

Среднее квадратическое уклонение случайного кватерниона A находится:

$$\sigma[A] = \sigma[a_0] + \sigma[a_1] \cdot i + \sigma[a_2] \cdot j + \sigma[a_3] \cdot k, \quad (1.40)$$

где $\sigma[a_{l-1}] = \sqrt{c_{ll}}$, $l = 1, 2, 3, 4$, а c_{ll} -- диагональные элементы матрицы $C[A]$.

1.5. Кватернионы и вращение векторов

Так как реальные и комплексные числа можно рассматривать как точки на комплексной плоскости соответственно, алгебраические операции с числами соответствуют геометрическим преобразованиям точек. Например, умножение на комплексное число z , $|z|=1$ можно интерпретировать как конечное вращение в комплексной плоскости.

Кватернионы являются расширением комплексных чисел и можно ожидать, что алгебраические операции среди них имеют нетривиальную дополнительную геометрическую интерпретацию.

Существует теорема, которая гласит о следующем: Предположим S есть 3-х мерная правосторонняя ортогональная система координат с базисными векторами идентифицируемыми с i, j, k . Допустим, A и R являются произвольными кватернионами с ненулевой частью,

относящейся к S . Далее, предположим, что $\|A\|=1$ и тригонометрическое представление кватерниона A является следующим:

$$A = (\cos \alpha + \vec{a}^0 \sin \alpha), \quad (1.41)$$

где \vec{a}^0 есть единичный вектор, ось вращения кватерниона A . Тогда норма и скалярная часть кватерниона

$$R' = A \cdot R \cdot A^{-1} \quad (1.42)$$

является равной, что и кватерниона R . Коэффициенты мнимой части $\text{Im} R'$ являются равными координатам вектора \vec{r}' , являющегося результатами конечного вращения вектора $\vec{r} = \text{Im} R$ на угол α против часовой стрелки вокруг оси \vec{a}^0 .

Простейшим примером, иллюстрирующим данную теорему является следующий пример. Пусть кватернион A равен: $A = \cos(\alpha/2) + i \sin(\alpha/2)$. Тогда кватернион R' равный

$$R' = A R A^* = (\cos(\alpha/2) + i \sin(\alpha/2)) \cdot R \cdot \cos(\alpha/2) - i \sin(\alpha/2), \quad (1.43)$$

в матричной форме в соответствии с (1.33), (1.34) будет иметь вид

$$V_{R'} = G_1(A) G_2(A^*) V_R.$$

Важным является представление в кватернионной форме привычного для нас геометрического преобразования – переход из одной системы координат в другую. В нашем случае -- преобразование вектора \vec{r}'_i из

системы координат S, x', y', z' в систему координат $S, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$, т.е. в вектор \tilde{r}_i ;

Пусть трёхмерный вектор точки \vec{r}_i' задан в правой системе координат S, x', y', z' :

$$\vec{r}_i' = [x_i', y_i', z_i']^T. \quad (1.44)$$

Вектор $\tilde{r}_i = [\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i]^T$ -- есть вектор этой же точки, который задан в правой системе координат $S, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$.

Поставим в соответствие вектору \tilde{r}_i кватернион

$$\tilde{r}_i \Leftrightarrow \tilde{r}_i = (\tilde{r}_0, \tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \tilde{r}_3)_i. \quad (1.45)$$

Вектору \vec{r}_i' , заданному в системе координат S, x', y', z' поставим в соответствие кватернион r_i' :

$$\vec{r}_i' \Leftrightarrow r_i' = (r_0', r_1', r_2', r_3')_i. \quad (1.46)$$

Разворот двух систем координат: S, x', y', z' относительно $S, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$; определим посредством кватерниона вращения $A = (a_0, a_1, a_2, a_3)$.

В нормированном пространстве элементы a_1, a_2, a_3 кватерниона A фактически представляют собой направляющие косинусы оси вращения. Вращение осуществляется вокруг этой оси против часовой стрелки на угол $\frac{\theta}{2}$, $\cos \frac{\theta}{2} = a_0$.

Преобразованию вектора \vec{r}_i' в \tilde{r}_i будет соответствовать выражение:

$$\tilde{r}_i = A r_i' A^*, \quad (1.47)$$

где A^* -- сопряжённый кватернион.

Поставим в соответствие кватерниону \tilde{r}_i четырехмерный вектор

$$\tilde{V}_{\tilde{r}_i} = [\tilde{r}_0, \tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \tilde{r}_3]^T = \tilde{r}_0 + \tilde{r}_i. \quad (1.48)$$

Согласно (1.47) в матричном виде для $\tilde{V}_{\tilde{r}_i}$ будет иметь место следующее выражение:

$$\tilde{V}_{\tilde{r}_i} = G_1(A) \cdot G_2(A^*) \cdot V'_{r'_i}, \quad (1.49)$$

где $G_1(A)$ и $G_2(A^*)$ имеют вид аналогичный (1.27), но применительно к кватерниону A . Известно так же, что произведение двух матриц $G_1(A) \cdot G_2(A^*)$ может быть представлено следующим образом:

$$G_1(A) \cdot G_2(A^*) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G_0(A) \end{bmatrix}, \quad (1.50)$$

где $G_0(A)$ -- матрица Родригеса.

1.6. Связь параметров кватерниона с угловыми элементами внешнего ориентирования аэрокосмических снимков

Связь параметров кватерниона с системой углов ориентирования -- углов Эйлера (Ω, I, ω) , используемых в космической фотограмметрии:

$$\begin{aligned} a_0 &= -\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos\left(\frac{I}{2}\right)\cos\left(\frac{\Omega}{2}\right) + \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos\left(\frac{I}{2}\right)\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right); \\ a_1 &= \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\sin\left(\frac{I}{2}\right)\cos\left(\frac{\Omega}{2}\right) + \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\sin\left(\frac{I}{2}\right)\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right); \end{aligned} \quad (1.51)$$

$$a_2 = -\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\sin\left(\frac{I}{2}\right)\cos\left(\frac{\Omega}{2}\right) + \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\sin\left(\frac{I}{2}\right)\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right);$$

$$a_3 = \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos\left(\frac{I}{2}\right)\cos\left(\frac{\Omega}{2}\right) + \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos\left(\frac{I}{2}\right)\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right).$$

Вращение осуществляется против часовой стрелки на углы $\pi - \frac{\Omega}{2}$, $\pi - \frac{I}{2}$, $\pi - \frac{\omega}{2}$.

Связь параметров кватерниона с первой системой углов ориентирования аэроснимка (α_0, t, χ) :

$$a_0 = -\cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)\cos\left(\frac{\chi}{2}\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)\sin\left(\frac{\chi}{2}\right);$$

$$a_1 = -\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)\sin\left(\frac{\chi}{2}\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)\cos\left(\frac{\chi}{2}\right);$$

$$a_2 = \sin\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)\sin\left(\frac{\chi}{2}\right) + \cos\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)\cos\left(\frac{\chi}{2}\right); \quad (1.52)$$

$$a_3 = \sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)\cos\left(\frac{\chi}{2}\right) + \cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)\sin\left(\frac{\chi}{2}\right).$$

Вращение осуществляется против часовой стрелки на углы $\pi - \frac{\alpha_0}{2}$, $\pi - \frac{t}{2}$, $\pi - \frac{\chi}{2}$.

Связь параметров кватерниона со второй системой углов ориентирования аэроснимка (α, ω, χ) :

$$a_0 = -\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos\left(\frac{\chi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\sin\left(\frac{\chi}{2}\right);$$

$$a_1 = -\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos\left(\frac{\chi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\sin\left(\frac{\chi}{2}\right); \quad (1.53)$$

$$a_2 = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos\left(\frac{\chi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\sin\left(\frac{\chi}{2}\right);$$

$$a_3 = -\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos\left(\frac{\chi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\sin\left(\frac{\chi}{2}\right).$$

Вращение производится против часовой стрелки по каждому из углов, причем, вокруг 2-ой оси вращение осуществляется на угол $\pi - \frac{\alpha}{2}$.

Матрица Родригеса, вычисляемая по параметрам кватерниона (1.51), (1.52), совпадает с ортогональной матрицей, элементы которой вычисляются по углам Эйлера при любых значениях углов.

Зная матрицу Родригеса $G_0(A)$ можно определить значения углов любой системы угловых элементов ориентирования. В частности, вычисления углов ориентирования, с учетом выше изложенного, будут производиться по следующим известным соотношениям:

-- для первой системы элементов ориентирования (α_0, t, χ) :

$$\alpha_0 = \arccos(g_{33}), t = \arctg\left(\frac{g_{23}}{g_{31}}\right), \chi = \arctg\left(-\frac{g_{32}}{g_{31}}\right); \quad (1.54)$$

-- для второй системы элементов ориентирования (α, ω, χ) :

$$\alpha = \arctg\left(-\frac{g_{33}}{g_{32}}\right), \omega = \arcsin(-g_{23}), \chi = \arctg\left(\frac{g_{21}}{g_{22}}\right); \quad (1.55)$$

-- для системы углов Эйлера (Ω, I, ω) :

$$\Omega = \arctg\left(-\frac{g_{31}}{g_{32}}\right), I = \arccos(g_{33}), \omega = \arctg\left(\frac{g_{31}}{g_{23}}\right); \quad (1.56)$$

-- для угловых элементов ориентирования наземного снимка (α, ω, χ) :

$$\alpha = \arctg\left(\frac{g_{12}}{g_{22}}\right), \omega = \arcsin(g_{32}), \chi = \arctg\left(\frac{g_{31}}{g_{33}}\right); \quad (1.57)$$

1.7. Прямой способ определения угловых элементов ориентирования аэрокосмического снимка

Суть способа прямого определения угловых элементов ориентирования снимка состоит в следующем.

Пусть на снимке имеются изображения двух опорных звезд. Зафиксируем положение снимка относительно инерциальной системы координат (ИСК) $jxyz$, которое он занимал в момент съемки t_i . При этом \bar{R}_1^0 -- направление на первую звезду σ_1 в инерциальном пространстве, \bar{r}_1^0 -- направление на первую звезду в системе координат снимка.

Повернем систему координат снимка $ixyz$ вокруг оси \bar{c}_1^0 так, чтобы направления $\bar{r}_1^{0/}$ и \bar{R}_1^0 совпали, т.е. чтобы направления на первую звезду в пространстве изображения и в инерциальном пространстве стали коллинеарны. В результате такого поворота система координат снимка $ixyz$ перейдет в некоторую промежуточную систему координат $ix'y'z'$, в которой направление на первую опорную звезду σ_1 совпадает с направлением на эту же звезду в ИСК, а направление на вторую звезду не совпадает.

Теперь необходимо повернуть систему координат $ix'y'z'$ до совмещения с инерциальной $ixyz$.

Осью вращения второго поворота будет вектор направления на первую опорную звезду -- $\bar{R}_1^0 = [L_1 \quad M_1 \quad N_1]^T$.

Располагая кватернионами первого и второго поворотов (нормированными кватернионами) можно найти кватернион общего поворота как их произведение.

Определив общий кватернион поворота можно вычислить родригесову форму ортогональной матрицы, а затем через её элементы углы ориентирования снимка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Урмаев М.С. Применение алгебры кватернионов в фотограмметрии. Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1986, № 2, с. 81 - 90.
2. Урмаев М.С. Космическая фотограмметрия. М.: Недра 1989
3. Арманович Л.И. Применение кватернионов для определения элементов внешнего ориентирования снимков. Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1989, № 6, с. 110 - 119.
4. Арманович Л.И. Применение кватернионов для определения элементов взаимного ориентирования снимков. Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1990, № 46, с. 99 - 110.
5. Dr. Ljudmila Meister (geb. Armanovitch). Quaternions and their application in fotogrammetry and navigation, 1998.
6. Щербаков М.И. Определение угловых элементов внешнего ориентирования звездного снимка. Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1978, № 1, с. 117-122.
7. Щербаков М.И. Прямой способ определения кватерниона поворота системы координат снимка. Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1994, № 4-5, с. 116-128.
8. Dr. Ljudmila Meister (geb. Aramanovitch). Quaternions and their application in fotogrammetry and navigation, 1998.
9. Урмаев М.С. , Родин С.П. Определение параметров преобразования геодезических прямоугольных пространственных координат при произвольных значениях параметров. Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1998, № 4-5, с. 3 - 14.
10. Урмаев М.С., Фролов А.В. Определение параметров преобразования геоцентрических систем координат с

использованием алгебры кватернионов. Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1999, № 4, с. 46- - 51.

11. Безменов В.М. Кватернионы в фотограмметрии. Уравнение коллинеарности. Геодезистъ, 2002, № 1, с. 12-14.
12. Куштин И.Ф., Бруевич П.Н., Лысков Г.А. Справочник техника фотограмметриста. М.: Недра, 1988
13. Лобанов А .Н. Фотограмметрия. М. : Недра ,1984, 552 с.

2. Теоретические основы проективной геометрии

Введение

Каждая область геометрии занимается изучением геометрических свойств, инвариантных по отношению к той или иной совокупности преобразований. Проективная геометрия изучает проективные свойства фигур, которые не разрушаются при проективных преобразованиях - операциях проектирования и сечения. Эти свойства являются более общими и более прочными свойствами фигур, чем свойства аффинные и метрические.

К основным инвариантам проективной геометрии относят двойное (сложное) отношение четырех коллинеарных точек, сопутствующее ему двойное отношение четырех прямых пучка прямых и четырех плоскостей пучка плоскостей, а также проективные координаты.

2.1. Группа проективных преобразований

В начале XIX века Понселе установил точечное преобразование пространства, осуществляемое кратным проектированием, и получившее поэтому название проективного преобразования. Группа проективных преобразований лежит в основе проективной геометрии, включающей корреляции и коллинеации. Корреляции ставят в соответствие точке первого пространства единственную плоскость второго пространства, а коллинеации - точке точку, прямой прямую, плоскости плоскость. Коллинеарное соответствие в пространстве описывается дробно-линейными функциями с общим знаменателем

$$\begin{cases} X'_1 = \frac{b_{11}X_1 + b_{12}X_2 + b_{13}X_3 + b_{14}}{b_{41}X_1 + b_{42}X_2 + b_{43}X_3 + b_{44}}, \\ X'_2 = \frac{b_{21}X_1 + b_{22}X_2 + b_{23}X_3 + b_{24}}{b_{41}X_1 + b_{42}X_2 + b_{43}X_3 + b_{44}}, \\ X'_3 = \frac{b_{31}X_1 + b_{32}X_2 + b_{33}X_3 + b_{34}}{b_{41}X_1 + b_{42}X_2 + b_{43}X_3 + b_{44}}, \end{cases} \quad (2.1)$$

где X'_i - координаты точки после преобразования;

X_i - координаты точки до преобразования;

b_{ij} - параметры преобразования ($i, j = 1, 2, 3$).

Если определитель четвертого порядка, составленный из коэффициентов b_{ij} отличен от нуля, то уравнения (2.1) однозначно разрешаются относительно X_1, X_2, X_3 , именно:

$$\begin{cases} X_1 = \frac{b'_{11}X'_1 + b'_{12}X'_2 + b'_{13}X'_3 + b'_{14}}{b'_{41}X'_1 + b'_{42}X'_2 + b'_{43}X'_3 + b'_{44}}, \\ X_2 = \frac{b'_{21}X'_1 + b'_{22}X'_2 + b'_{23}X'_3 + b'_{24}}{b'_{41}X'_1 + b'_{42}X'_2 + b'_{43}X'_3 + b'_{44}}, \\ X_3 = \frac{b'_{31}X'_1 + b'_{32}X'_2 + b'_{33}X'_3 + b'_{34}}{b'_{41}X'_1 + b'_{42}X'_2 + b'_{43}X'_3 + b'_{44}}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Каждой точке (X_1, X_2, X_3) , в которой знаменатель дробей (2.1) не обращается в нуль, отвечает определенная точка (X'_1, X'_2, X'_3) и обратно каждой точке (X'_1, X'_2, X'_3) , в которой знаменатель дробей (2.2) не обращается в нуль, соответствует определенная точка (X_1, X_2, X_3) .

Коллинеации в пространстве представляют собой 15-ти членную группу проективных преобразований, так как дело идет только об отношениях 16-ти коэффициентов в уравнениях (2.1).

Таким образом, коллинеарное соответствие в пространстве вполне определится, если пяти произвольным точкам первого пространства, из которых никакие четыре не лежат на одной плоскости, задать пять соответствующих точек второго пространства, также не лежащих на одной плоскости.

Добавленные условия находят свое аналитическое обоснование в том, что при вычислении коэффициентов никакие определители четвертого порядка из координат четырех точек не должны обращаться в нуль.

Проективные преобразования всего 3-х мерного пространства, не сводящиеся к аффинным, могут быть рассматриваемы как взаимно-однозначные только в том случае (как это отмечается в следующем разделе), если евклидово пространство обогащено несобственными элементами, т.е. расширено до проективного. Чтобы охватить этот случай, переходят к однородным координатам (четырем в пространстве - x_1, x_2, x_3, x_4), которые при любых их значениях определяют точку. В однородных координатах проективное преобразование в пространстве выражается уравнениями

$$\begin{cases} \rho x'_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 \\ \rho x'_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 \\ \rho x'_3 = b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + b_{34}x_4 \\ \rho x'_4 = b_{41}x_1 + b_{42}x_2 + b_{43}x_3 + b_{44}x_4 \end{cases}, \quad (2.3)$$

где ρ есть функция от однородных координат x_1, x_2, x_3, x_4 [18,35,41].

Для плоскости, если ограничиться собственными точками, формулы коллинеарного соответствия имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}} \\ y' &= \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

где x', y' - координаты точки после преобразования;

x, y - координаты точки до преобразования;

a_{ij} - параметры преобразования.

Формулы (2.4) проективного преобразования координат точек плоскости получены методами дифференциальной геометрии в начале XX века Шефферсом. Задача ставится с целью найти структуру функций

$$\left. \begin{aligned} x' &= \varphi(x, y) \\ y &= \psi(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

которые прямую

$$ax + by + c = 0 \quad (2.6)$$

преобразуют в прямую

$$a'x' + b'y' + c' = 0 \quad (2.7)$$

Решая задачу, Шефферс получает систему дифференциальных уравнений, которым должны удовлетворять функции (2.5) при условии (2.6) и (2.7). Интегрирование этих уравнений приводит их к дробно-линейным выражениям (2.4).

Поделив числитель и знаменатель выражений (2.4) на один из параметров, отличный от нуля, получим функции

восьмипараметрические. Поэтому, группу проективных преобразований плоскости называют восьмипараметрической (восьмичленной).

Параметры в функциях (2.4) могут быть определены по координатам соответствующих четырех точек до и после преобразования. При этом, четверки точек по три не должны быть коллинеарными, т.е. не лежать на одной прямой. Вместо четырех точек для определения параметров можно включить соответствующее число пар прямых или комбинаций прямых и точек.

Исследование выражений (2.4) приводит к неопределенной зависимости точек с координатами x' , y' и x , y , когда знаменатель дробей в выражениях (2.4) равен нулю. Помимо этого, даже, если знаменатель не равен нулю, точки прямой $a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0$ не имеют себе соответствующих образов и поэтому взаимно однозначное соответствие для точек этой прямой нарушается. Этот недостаток абстрактным образом устраняется путем введения несобственных элементов и замены неоднородных декартовых координат точек плоскости однородными координатами.

Геометрические представления о преобразованиях предлагают два поля точек в одной системе координат и при этом одно поле точек преобразуется в другое. Однако бывает целесообразным представлять одно поле точек в двух разных системах координат и говорить о преобразовании точек из одной системы координат в другую. В связи с этим вводят понятие проективной системы координат, состоящей из фиксированных четырех по три неколлинеарных точек.

2.2. Проективное пространство и проективная плоскость

Проективное пространство может быть получено как непосредственное расширение обычного евклидова пространства.

Дополнение евклидова пространства его несобственными элементами является тем шагом, который устраняет неопределенности в проективных преобразованиях геометрических образов и делает этот процесс взаимно-однозначным.

В подтверждение этому рассмотрим простейший пример. Пусть на некоторой евклидовой плоскости Π имеется произвольная прямая ℓ и точка S , не принадлежащая этой прямой (рис.2.1).

Прямые, проходящие через точку S , составят плоский пучок лучей. Устанавливая соответствие между лучами этого пучка и точками прямой ℓ , видно, что луч d_n пучка, параллельный прямой ℓ не пересекает ее, т.е. не имеет соответствующей себе точки.

Таким образом, соответствие между прямыми пучка с центром в точке S и точками прямой ℓ не является взаимно однозначным.

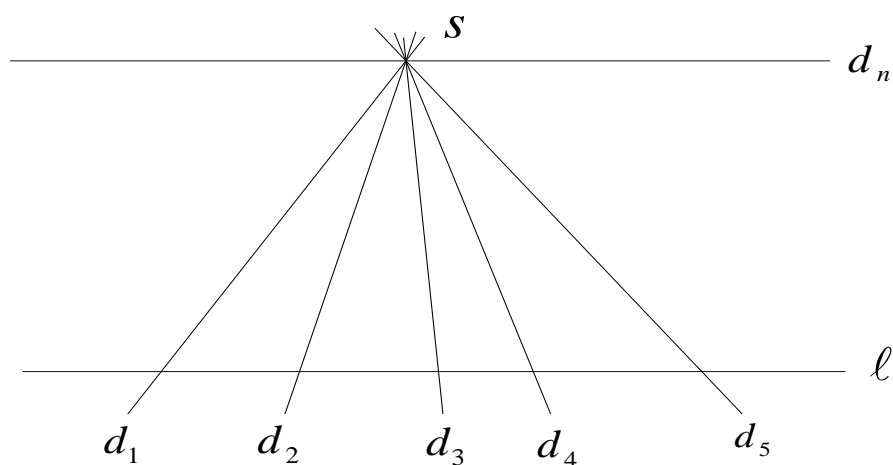


Рис.2.1 Неоднозначность в проектировании.

Для того чтобы проектирование было взаимно однозначным необходимо, чтобы параллельные прямые ℓ и d_n имели общую точку. Иначе говоря, множество точек обыкновенной прямой евклидова пространства необходимо дополнить бесконечно удаленной

(несобственной) точкой. В результате такого дополнения определится проективная прямая, имеющая единственную несобственную точку, независимо от того, в какой плоскости будет строиться пучок, ее определяющий. Таким образом, расширение евклидовой прямой до проективной приводит к тому, что процесс проектирования становится взаимно однозначным.

Под несобственной точкой прямой, лежащей в данной плоскости Π подразумевают то общее, что имеют все прямые, лежащие в этой плоскости и параллельные данной прямой. При проектировании этих прямых на другую плоскость Π' мы получим в ней не совокупность параллельных прямых, а совокупность прямых, проходящих через одну и ту же точку (рис.2.2).

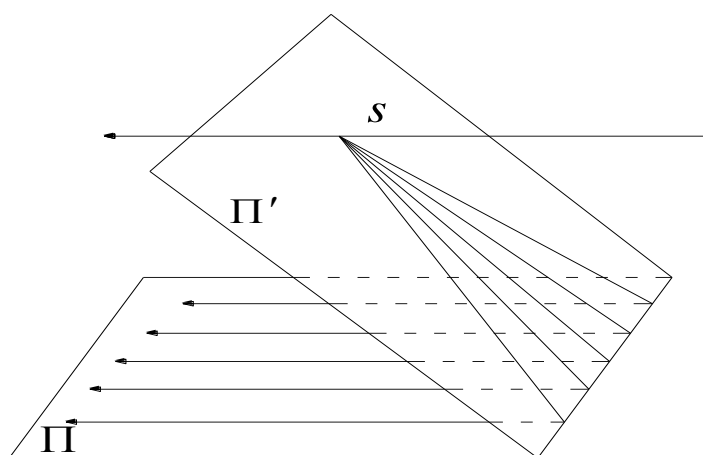


Рис. 2.2 Геометрическая интерпретация несобственной точки.

Совершенно очевидно, что и плоскость в евклидовом пространстве, как носитель проективной прямой, превращается в проективную плоскость путем присоединения к плоскости евклидова пространства одной несобственной прямой, являющейся геометрическим местом несобственных точек этой плоскости.

Можно показать, что геометрическим местом всех несобственных прямых всех плоскостей пространства является плоскость, которую называют несобственной плоскостью всего пространства. Данное пространство имеет одну несобственную плоскость. Существенным является то, что проективная геометрия признает полное равноправие между собственными и несобственными элементами. Поскольку при проектировании несобственные элементы могут переходить в собственные и наоборот, то проективного различия между ними не существует. Для каждой отдельно взятой и в проективном смысле равноправны между собой, и поэтому любую точку этой прямой можно назвать несобственной точкой. Точно так же, рассматривая отдельно какую-нибудь плоскость, каждую прямую, лежащую на ней, можно принять за несобственную прямую, а точки пересечения этой прямой со всеми другими прямыми той же плоскости считать несобственными точками этих прямых. Поскольку на проективной плоскости все элементы равноправны и не выделено несобственной прямой, то вопрос о метрических свойствах фигур, принадлежащих этой плоскости, не имеет проективного содержания. Последние, как известно, связаны с несобственными элементами плоскости.

Задача построения проективного пространства может быть также решена на собственной аксиоматической базе. Из пяти групп гильбертовых аксиом - аксиом соединения, аксиом порядка, аксиом конгруэнтности, аксиомы параллельности, аксиомы непрерывности, базой для построения проективного пространства являются лишь аксиомы соединения, порядка и непрерывности.

Рассмотрим возможные модели проективной плоскости.

В обычном трехмерном евклидовом пространстве можно построить ряд геометрических форм, аксиоматически эквивалентных геометрическому образу проективной плоскости. Наиболее простой

моделью проективной плоскости является евклидова плоскость, дополненная несобственными точками. Другая модель проективной плоскости была указана Ф.Клейном - полусфера с идентифицированными концами диаметров экваториального круга. В этой модели несобственная точка прямой изображается на сфере не одной, а двумя точками - противоположными точками экватора. Поверхность, полностью топологически эквивалентная проективной плоскости является замкнутой, односторонней поверхностью - конус, опирающийся на лист Мебиуса. Такая проективная плоскость может быть построена только в четырехмерном пространстве.

Для нас в дальнейшем будет иметь важную роль модель проективной плоскости, представляющая связку прямых в пространстве (рис.2.3).

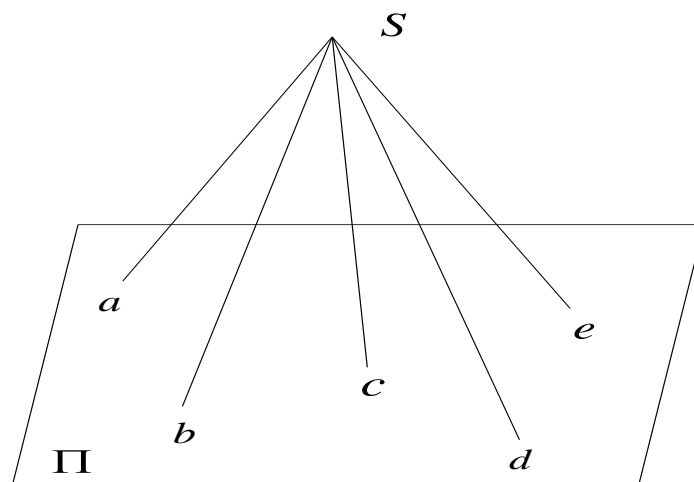


Рис.2.3 Модель проективной плоскости. Связка прямых.

Связка прямых представляет собой совокупность прямых пространства, проходящих через одну точку S пространства. Если связку пересечь плоскостью, не проходящей через центр связки, то в сечении получится проективная плоскость в обычном смысле. Каждая прямая связки при пересечении с плоскостью даст точку (рис.2.3), а каждая плоскость связки даст прямую (рис.2.4). Прямые линии связки,

параллельные секущей плоскости, дадут несобственные точки, а плоскость, параллельная секущей плоскости, даст несобственную прямую. Здесь можно использовать принцип двойственности, согласно которому плоскому полю будет соответствовать совокупность всех прямых и плоскостей, проходящих через одну точку, т.е. связка прямых и плоскостей.

Эту модель проективной плоскости мы будем в дальнейшем использовать при векторной интерпретации инвариантных соотношений проективной геометрии.

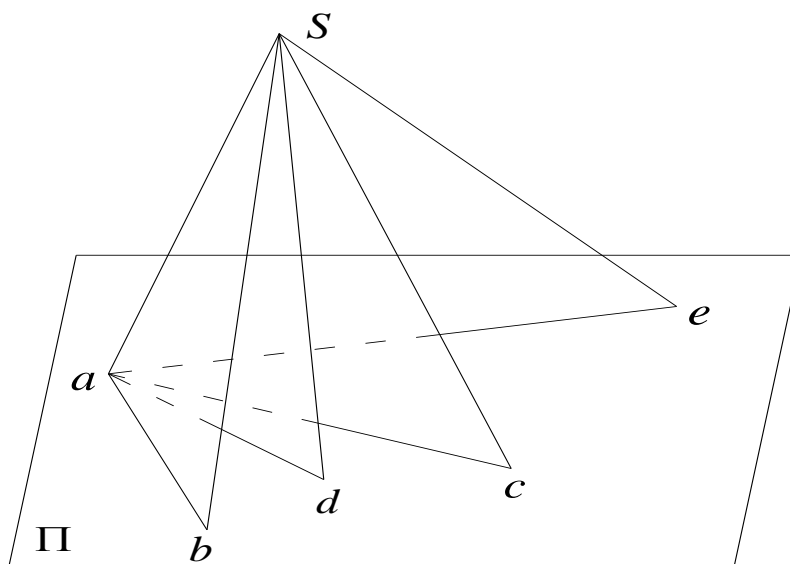


Рис.2.4 Модель проективной плоскости. Связка плоскостей.

2.3 Однородные координаты

Под однородными координатами точек проективной плоскости понимается класс ненулевых пропорциональных между собой троек вещественных чисел (x_1, x_2, x_3) . Ф.Клейн отмечает, что впервые однородные координаты были введены Мебиусом в 1827 г. под названием барицентрических координат. Мебиус фиксировал в

плоскости три неколлинеарные точки, в которых предполагал подвешенными грузы. Положение четвертой точки он характеризовал как центр тяжести трех фиксированных точек с конкретными значениями грузов - барицентрическими координатами.

Более простую интерпретацию однородных координат. Рассмотрим проективную плоскость как связку прямых (рис.2.5) совместно с пространственной системой координат. Направлению каждой прямой связки можно поставить в соответствие тройку чисел x_1, x_2, x_3 или тройку чисел, пропорциональных x_1, x_2, x_3 . Рассекая связку прямых плоскостью, которая не проходит через вершину связки, получим поле точек. Каждой точке соответствуют пары чисел x, y в плоской системе координат, их называют неоднородными координатами. Тройки чисел определяющие соответствующие направления прямых, называют однородными координатами точек плоскости. Говорят, что однородные координаты не изменяются, если их умножить на отличный от нуля множитель $\rho (\neq 0)$. Для координат различных точек значения ρ могут быть разными.

Однородные координаты однозначно определяют положение точки на плоскости и это положение определяется отношением однородных координат $x_1 : x_2 : x_3$. Геометрическая интерпретация однородных координат приведена на рис.2.5. На нем изображена прямая Se связки с вершиной S и плоскость Π , которая не содержит S . Пересечение прямой с плоскостью определит точку e . Проекция отрезка Se на оси координат будут однородными координатами точки e . Им ставится в соответствие вектор \vec{r} или $\rho \vec{r}$. Этот вектор называют вектором-направлением или **однородным вектором** точки плоскости.

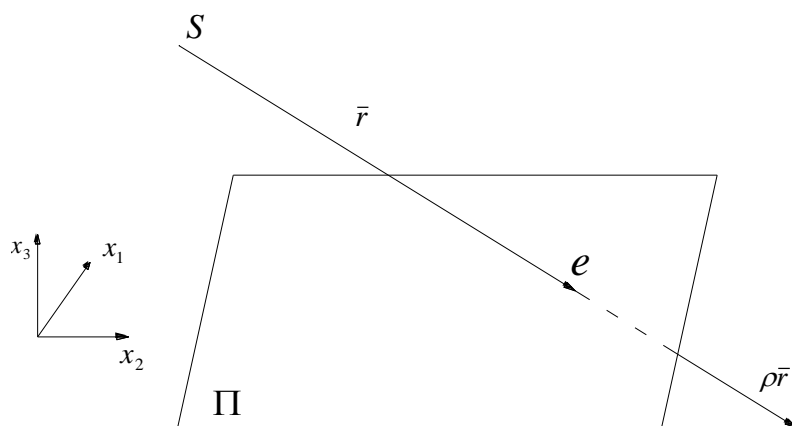


Рис.2.5 Геометрическая интерпретация однородных координат точки.

Будем считать, что однородному вектору \bar{r} соответствует тройка чисел (x_1, x_2, x_3) – однородных координат: $\bar{r}_i = [x_1, x_2, x_3]^T$, где третья координата $x_3 = \text{const}$.

Пусть Π - проективная плоскость, за модель которой принята соответствующая евклидова плоскость и пусть на плоскости Π задана декартова система координат. Если точка e является собственной точкой плоскости Π и имеет декартовы координаты (x, y) то однородными координатами точки e будет тройка чисел (x_1, x_2, x_3) , не равных одновременно нулю и таких, что

$$\frac{x_1}{x_3} = x ; \quad \frac{x_2}{x_3} = y , \quad (2.8)$$

при $x_3 \neq 0$.

Если точка расположена на бесконечно удаленной прямой, т.е. является несобственной точкой плоскости, то у нее отсутствуют неоднородные координаты, поэтому сделанное определение однородных координат непригодно для точек, лежащих на несобственной прямой.

Однородными координатами несобственной точки называют тройку чисел (x_1, x_2, x_3) , удовлетворяющих следующим условиям: 1) $x_3 \neq 0$; 2) из двух чисел x_1 и x_2 хотя бы одно отлично от нуля; 3) отношение координат $x_1 : x_2 = -b/a$, где b и a коэффициенты уравнения (2.6) любой прямой, проходящей через эту несобственную точку.

Однородным вектором можно описывать положение бесконечно удаленных (несобственных) точек плоскости Π . Это объясняется возможностью изменять для каждой точки множитель ρ . Например, все однородные векторы точек плоскости могут быть единичными, т.е. концами задавать точки сферы с центром в точке S . В этом одно из преимуществ однородных координат. Используя однородные координаты и заменяя $(x, y), (x', y')$ отношениями

$$\frac{\rho x_1}{\rho x_3}, \frac{\rho x_2}{\rho x_3}, \frac{\rho x'_1}{\rho x'_3}, \frac{\rho x'_2}{\rho x'_3}, \quad (2.9)$$

формулы проективных преобразований (1.4) записывают в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \rho x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \rho x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Произвольный множитель пропорциональности $\rho (\rho \neq 0)$, стоящий в левой части этих уравнений показывает, что дело идет только об отношениях $x'_1 : x'_2 : x'_3$.

Выражения (2.10) проективных преобразований точек плоскости могут быть записаны в матрично-векторной форме

$$\rho \bar{r}' = A \bar{r} \quad (2.11)$$

где A - матрица коэффициентов a_{ij} ; $\rho \bar{r}'$ и \bar{r} - однородные векторы. Однородные координаты удобны не только для описания положения несобственных элементов. Они, что не менее важно, позволяют решать задачи проективной в векторной форме.

2.4. Двойное отношение

Недостатком однородных координат является зависимость их от выбора начала S и системы координат, в которой заданы вектор-направление (точки проективной плоскости). Лишено этого недостатка двойное отношение четырех коллинеарных точек, а также сопутствующее ему двойное отношение четырех прямых пучка и двойное отношение четырех плоскостей пучка плоскостей.

Пусть заданы четыре точки e_1, e_2, e_3, e_4 некоторой прямой (рис.1.8); тогда двойным отношением называют отношение отрезков

$$\gamma = (e_1 e_2 e_3 e_4) = \frac{e_1 e_3}{e_2 e_3} : \frac{e_1 e_4}{e_2 e_4}, \quad (2.12)$$

где γ и $(e_1 e_2 e_3 e_4)$ - обозначение двойного отношения.



Рис.2.6 Двойное отношение отрезков

Двойное отношение не изменяется при любых проективных преобразованиях; оно является основным метрическим инвариантом проективной геометрии.

Рассмотрим простейший пример. На рис.2.7 изображены четыре прямые d_1, d_2, d_3, d_4 одной плоскости, проходящие через одну точку S (центр проекции) и пересекающиеся двумя секущими прямыми ℓ_1 и ℓ_2 в точках e_1, e_2, e_3, e_4 и соответственно в точках e'_1, e'_2, e'_3, e'_4 . Вследствие свойства инвариантности двойного отношения будет иметь место равенство

$$(e_1 e_2 e_3 e_4) = (e'_1 e'_2 e'_3 e'_4). \quad (2.13)$$

В общем случае отношение (2.13) называют ангармоническим.

Говорят, что четыре точки проективной прямой образуют гармоническую группу, если их двойное отношение равняется - 1. Это значит, что базисная пара точек e_1 и e_2 разделена делящей парой точек e_3 и e_4 так, что простые отношения трех точек из гармонической четверки, равны по величине, но противоположны по знаку, т.е.

$$(e_1 e_2 e_3) = -(e_1 e_2 e_4).$$

Сложное отношение обладает свойством

$$(e_1 e_2 e_3 e_4) = (e_3 e_4 e_1 e_2) = (e_2 e_1 e_4 e_3), \quad (2.14)$$

т.е.

$$(e_3 e_4 e_1 e_2) = \frac{e_3 e_1}{e_4 e_1} : \frac{e_3 e_2}{e_4 e_2} = \frac{e_3 e_1}{e_3 e_2} : \frac{e_4 e_1}{e_4 e_2} = \frac{e_1 e_3}{e_2 e_3} : \frac{e_1 e_4}{e_2 e_4} = (e_1 e_2 e_3 e_4).$$

При перестановке точек внутри какой-нибудь отдельной пары имеет место зависимость

$$(e_1 e_2 e_3 e_4) = \frac{1}{(e_1 e_2 e_4 e_3)}, \quad (e_1 e_2 e_3 e_4) = \frac{1}{(e_2 e_1 e_3 e_4)}. \quad (2.15)$$

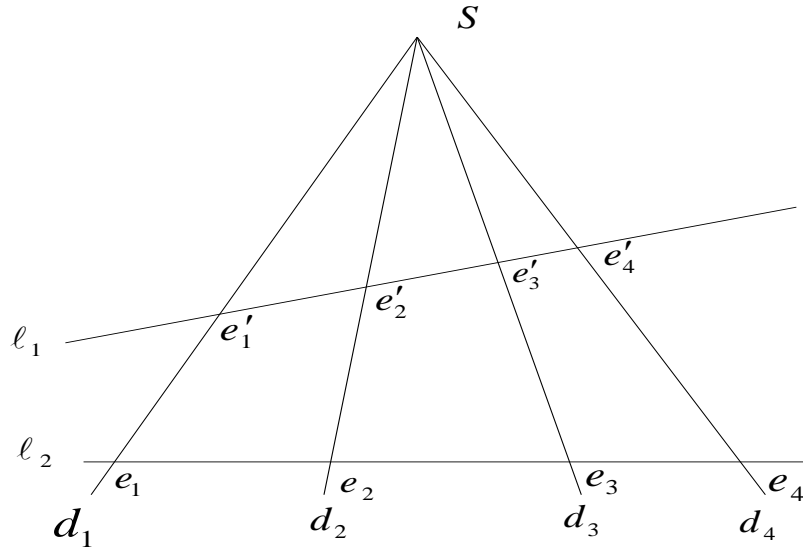


Рис.2.7 Инвариантность двойного отношения

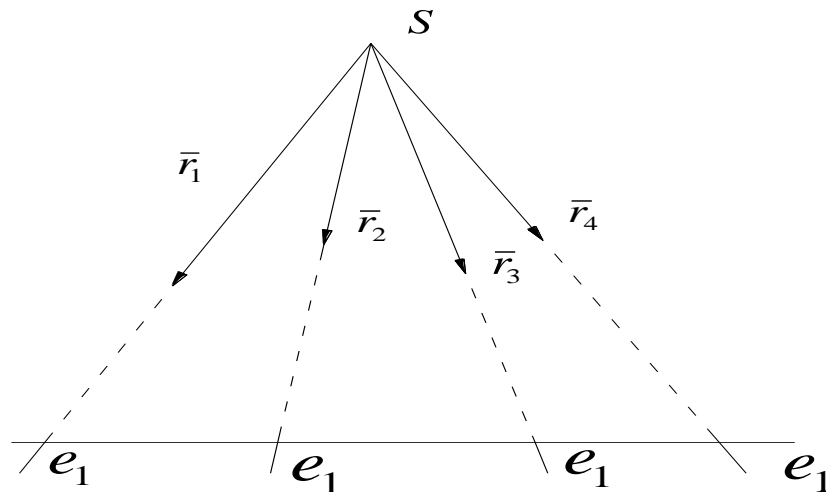


Рис.2.8 Двойное отношение компланарных векторов

Двойное отношение может быть представлено скалярной функцией компланарных векторов. Пусть имеется четыре компланарных вектора r_1, r_2, r_3, r_4 перспективного ряда и сопутствующие им четыре коллинеарные точки e_1, e_2, e_3, e_4 прямолинейного ряда (рис.2.6). Тогда двойное отношение может быть выражено через скалярную функцию векторов r_i ($i = 1, 2, 3, 4$) по формуле:

$$\gamma = \frac{[\vec{r}_1 \times \vec{r}_3][\vec{r}_2 \times \vec{r}_4]}{[\vec{r}_1 \times \vec{r}_4][\vec{r}_2 \times \vec{r}_3]}, \quad (2.16)$$

где $[\vec{r}_1 \times \vec{r}_3][\vec{r}_2 \times \vec{r}_4]$ - скалярное произведение векторов $[\vec{r}_1 \times \vec{r}_3]$ и $[\vec{r}_2 \times \vec{r}_4]$; $[\vec{r}_1 \times \vec{r}_4][\vec{r}_2 \times \vec{r}_3]$ - скалярное произведение векторов $[\vec{r}_1 \times \vec{r}_4]$ и $[\vec{r}_2 \times \vec{r}_3]$. Как видно из (1.13) и (1.14,) двойное отношение четырех коллинеарных точек и сопутствующее ему двойное отношение четырех компланарных прямых пучка не зависит от выбора центра проектирования S и от системы координат, в которой заданы векторы-направления \vec{r}_i ($i = 1,2,3,4$) или точки e_i ($i = 1,2,3,4$).

Действительно, правая часть выражения (2.16) не зависит от значения модулей векторов \vec{r}_i ($i = 1,2,3,4$), так как они содержатся как в числителе, так и в знаменателе дроби.

Представляя, что векторы $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4$ концами опираются на точки e_1, e_2, e_3, e_4 можно увидеть, что векторные произведения из $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4$ будут пропорциональны площадям треугольников с вершиной в точке S . В связи с этим, двойное отношение, выраженное через скалярную функцию векторов (2.16) можно рассматривать как число, образованное из отношений площадей треугольников, что равносильно отношениям их оснований.

Рассматривая рис.2.9, в плоскости Π , представим пять точек e_0, e_1, e_2, e_3, e_4 . В соответствие им поставим пять однородных векторов $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4$. Нормали к плоскостям пучка плоскостей с ребром определяются векторными произведениями $[\vec{r}_1 \times \vec{r}_2], [\vec{r}_1 \times \vec{r}_3], [\vec{r}_1 \times \vec{r}_4], [\vec{r}_1 \times \vec{r}_0]$. Каждый из этих векторов определяет ориентацию плоскости, которая пересекает проективную плоскость по соответственным прямым $e_1e_2, e_1e_3, e_1e_4, e_1e_0$ (рис.2.10).

Легко усмотреть компланарность четырех векторов $[\bar{r}_1 \times \bar{r}_2], [\bar{r}_1 \times \bar{r}_3], [\bar{r}_1 \times \bar{r}_4], [\bar{r}_1 \times \bar{r}_0]$: векторное произведение между двумя любыми парами из этих векторов определяет направление ребра Se_1 пучка плоскостей $Se_1e_2, Se_1e_3, Se_1e_4, Se_1e_0$ (рис.2.10).

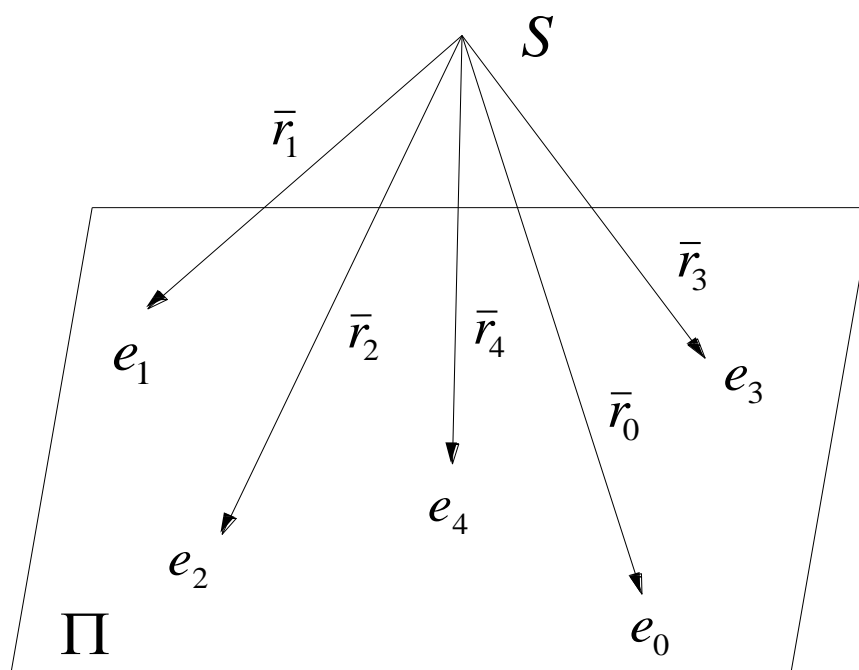


Рис.2.9 Двойное отношение. Однородные векторы и соответствующие им точки плоскости

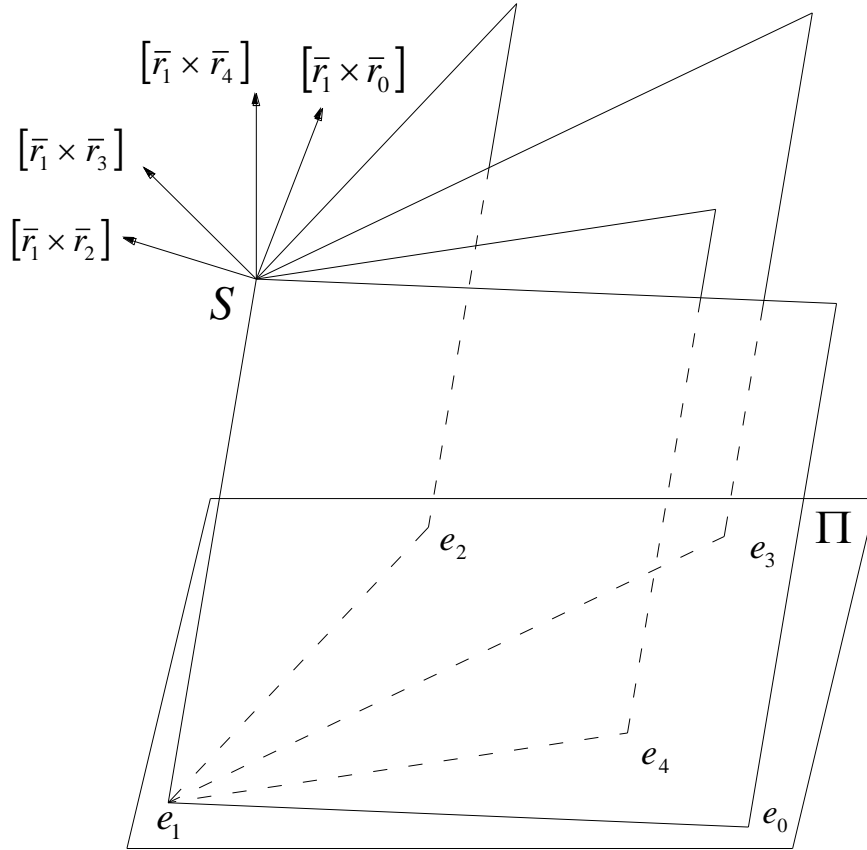


Рис.2.10 Двойное отношение. Компланарность четырех векторов

$$[\bar{r}_1 \times \bar{r}_2], [\bar{r}_1 \times \bar{r}_3], [\bar{r}_1 \times \bar{r}_4], [\bar{r}_1 \times \bar{r}_0]$$

Руководствуясь структурой формулы (2.16), составим двойное отношение четырех компланарных векторов $[\bar{r}_1 \times \bar{r}_2], [\bar{r}_1 \times \bar{r}_3], [\bar{r}_1 \times \bar{r}_4], [\bar{r}_1 \times \bar{r}_0]$ (рис.2.11).

$$\gamma_1 = \frac{[\bar{r}_1 \times \bar{r}_2] \times [\bar{r}_1 \times \bar{r}_4] \cdot [\bar{r}_1 \times \bar{r}_3] \times [\bar{r}_1 \times \bar{r}_0]}{[\bar{r}_1 \times \bar{r}_2] \times [\bar{r}_1 \times \bar{r}_0] \cdot [\bar{r}_1 \times \bar{r}_3] \times [\bar{r}_1 \times \bar{r}_4]}, \quad (2.17)$$

также равное двойному отношению соответственных прямых.

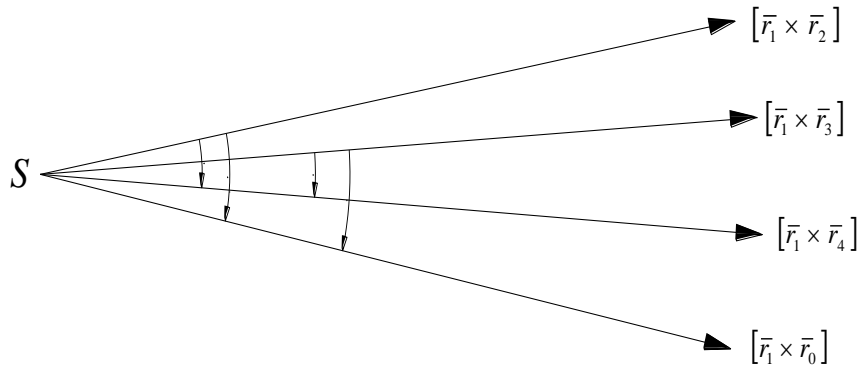


Рис. 2.11 Компланарные векторы

Выполнив векторные преобразования в правой части выражения (2.17), получим

$$\gamma_1 = \frac{r_1 r_2 r_4}{r_1 r_2 r_0} \cdot \frac{r_3 r_1 r_0}{r_3 r_1 r_4}, \quad (2.18)$$

где $r_1 r_2 r_4$, $r_1 r_2 r_0$, $r_3 r_1 r_4$, $r_3 r_1 r_0$ - смешанные произведения, составленные из однородных векторов r_0 , r_1 , r_2 , r_3 , r_4 . Если построить пучки плоскостей с ребрами Se_2 и Se_3 , которым в плоскости будут соответствовать пучки прямых с вершинами в точках e_2 и e_3 , то соответствующие им двойные отношения γ_2 и γ_3 будут определены формулами

$$\gamma_2 = \frac{r_1 r_2 r_4}{r_1 r_2 r_0} \cdot \frac{r_3 r_2 r_0}{r_3 r_2 r_4}, \quad (2.19)$$

$$\gamma_3 = \frac{r_1 r_3 r_4}{r_1 r_3 r_0} \cdot \frac{r_3 r_2 r_0}{r_3 r_2 r_4}. \quad (2.20)$$

Сравнивая выражения для γ_1 , γ_2 и γ_3 , приходим к выводу, что

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{r_1 r_3 r_0}{r_1 r_3 r_4} \cdot \frac{r_3 r_2 r_4}{r_3 r_2 r_0} = \frac{1}{\gamma_3},$$

или

$$\gamma_3 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \quad (2.21)$$

Отмечается, что при коллинеарности точек e_0, e_2, e_3, e_4 двойное отношение γ_1 не зависит от выбора точки e_1 вне прямой $e_0 e_2$, а при коллинеарности точек e_0, e_1, e_3, e_4 двойное отношение не зависит от выбора точки e_2 вне прямой $e_0 e_1$. Подобное имеет место и для γ_3 , которое не зависит от выбора точки e_3 вне прямой $e_0 e_1$ при коллинеарности точек e_0, e_1, e_2, e_4 .

Таковы векторные представления двойного отношения - основного метрического инварианта проективной геометрии.

2.5. Проективные координаты

Метод декартовых координат, применяемый в аналитической геометрии, не может непосредственно применяться к решению задач проективной геометрии, поскольку несобственные элементы проективной плоскости и проективного пространства в евклидовом пространстве не определяются.

Проективная система координат на проективной плоскости определяется заданием четырех фиксированных неколлинеарных точек e_1, e_2, e_3, e_4 (рис.2.12). Точка e_1 называется началом двух проходящих через нее прямых $e_1 e_2$ и $e_1 e_3$. Одна из этих прямых, допустим прямая $e_1 e_2$, пусть будет осью X , а другая, т.е. $e_1 e_3$ - осью Y . Если представить, что проективная плоскость "разрезана" вдоль несобственной прямой $e_2 e_3$, то точки e_2 и e_3 в таком случае принимают за собственные точки

∞_x, ∞_y , соответственно оси X и оси Y . Точка e_4 , не принадлежащая ни оси X , ни оси Y , называется единичной. Заметим, что шкала проективных координат зависит от выбора точки e_4 .

Рассмотрим точку e_0 , которая произвольно расположена на проективной плоскости. Положение точки e_0 на проективной плоскости определится проекциями данной точки на соответствующие оси проективной (неоднородной) системы координат. Пусть e_{0X} - проекция точки e_0 из $e_3 (\infty_y)$ на ось X , а e_{0Y} из $e_2 (\infty_x)$ на ось Y . Точка e_{0X} в проективной системе координат на оси X имеет некоторую координату X , а точка e_{0Y} на оси Y имеет координату Y . Значения координат, соответствующие точкам e_{0X} и e_{0Y} , являются неоднородными координатами точки e_0 на проективной плоскости. Каждая точка, принадлежащая оси X будет иметь координаты $(x,0)$, а каждая точка оси Y - координаты $(0,y)$. Точки e_{4X} и e_{4Y} , являющиеся проекциями единичной точки e_4 на ось X и ось Y , соответственно будут иметь координаты $(1,0)$ и $(0,1)$. Если точка расположена на несобственной прямой, то у нее, как известно, отсутствуют неоднородные проективные координаты. Чтобы исправить это положение, на проективной плоскости вводят систему однородных проективных координат.

Введем на проективной плоскости однородные проективные координаты и заодно установим их связь с двойным отношением. За неоднородные проективные координаты произвольной точки на прямой ℓ , с тремя заданными на ней базисными точками, принимают число, равное двойному отношению. Принимая точки e_1, e_2, e_{4X} за базисные на оси X , а точки e_1, e_3, e_{4Y} за базисные на оси Y , выразим проективные координаты X и Y точки e_0 двойными отношениями. Согласно правилу составления двойного отношения (2.12), будем иметь (рис.2.12):

$$X = (e_1 e_2 e_{0X} e_{4X}) = \frac{e_1 e_{0X}}{e_2 e_{0X}} : \frac{e_1 e_{4X}}{e_2 e_{4X}}; \quad (2.22)$$

$$Y = (e_1 e_3 e_{0Y} e_{4Y}) = \frac{e_1 e_{0Y}}{e_3 e_{0Y}} : \frac{e_1 e_{4Y}}{e_3 e_{4Y}}. \quad (2.23)$$

Свойство инвариантности двойного отношения (2.13) позволяет записать (рис.2.12)

$$X = (e_1 e_2 e_{0X} e_{4X}) = (q d e_0 e_4) = (e_0 e_4 q d); \quad (2.24)$$

$$Y = (e_1 e_3 e_{0Y} e_{4Y}) = (t d e_0 e_4) = (e_0 e_4 t d), \quad (2.25)$$

или

$$X = (e_0 e_4 q d) = \frac{e_0 q}{e_4 q} : \frac{e_0 d}{e_4 d} = \frac{\xi_2}{\xi_1}, \quad (2.26)$$

$$Y = (e_0 e_4 t d) = \frac{e_0 t}{e_4 t} : \frac{e_0 d}{e_4 d} = \frac{\xi_3}{\xi_1}. \quad (2.27)$$

В выражениях (2.26) и (2.27) через ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 обозначены простые отношения, которые и являются однородными проективными координатами.

$$\xi_1 = \frac{e_0 d}{e_4 d}, \quad \xi_2 = \frac{e_0 q}{e_4 q}, \quad \xi_3 = \frac{e_0 t}{e_4 t}. \quad (2.28)$$

Проективные координаты пропорциональны расстояниям от трех неподвижных прямых ,

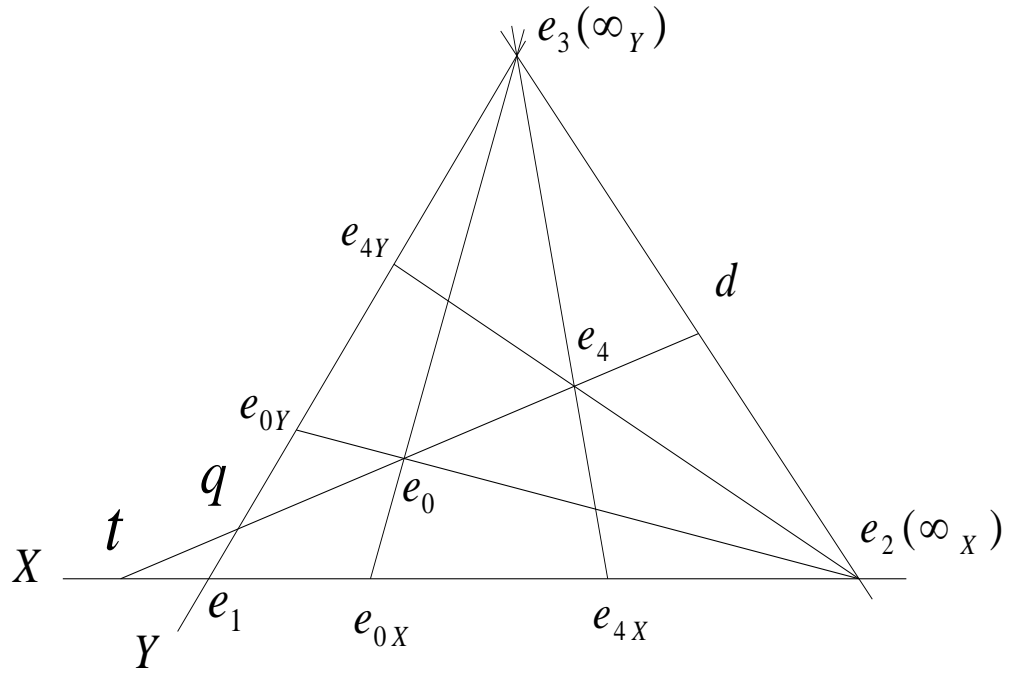


Рис.2.12 Система проективных координат

умноженным на постоянные множители (рис.2.13). Из подобных треугольников следует, что

$$\frac{e_0 d}{e_4 d} = \frac{e_0 a}{e_4 f}; \quad \frac{e_0 q}{e_4 q} = \frac{e_0 b}{e_4 g}; \quad \frac{e_0 t}{e_4 t} = \frac{e_0 c}{e_4 h}. \quad (2.29)$$

Сравнив формулы (2.28) и (2.29), получим однородные координаты точки e_0 в виде отношений:

$$\xi_1 = \frac{e_0 a}{e_4 f}; \quad \xi_2 = \frac{e_0 b}{e_4 g}; \quad \xi_3 = \frac{e_0 c}{e_4 h}. \quad (2.30)$$

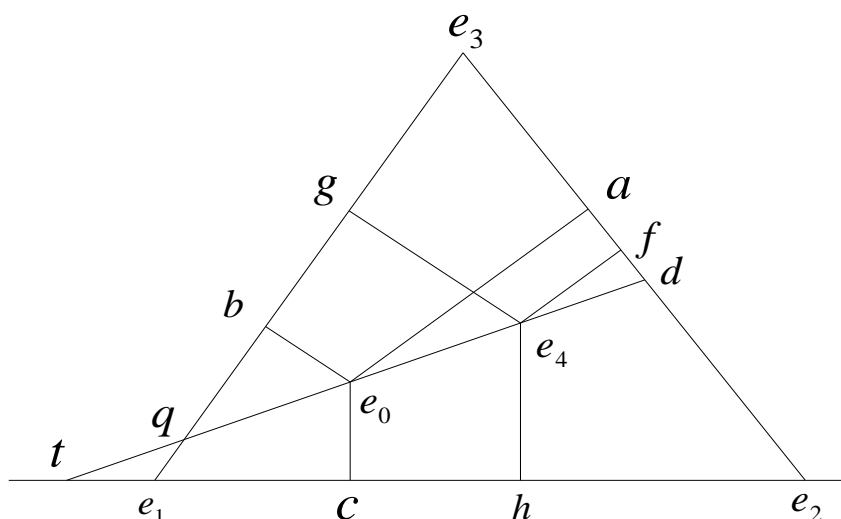


Рис.2.13. Проективные координаты. Пропорциональность проективных координат расстояниям от трех координатных прямых.

Из этих выражений видно, что однородны проективные координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 точки e_0 действительно пропорциональны расстояниям точки от трех координатных прямых и являются отношениями расстояний от точек e_0 и e_4 до сторон координатного треугольника с вершинами e_1, e_2, e_3 .

Обозначим аффинные координаты точек e_0, e_1, e_2, e_3, e_4 соответственно через $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$. Тогда, как известно из аналитической геометрии, отношение расстояний точек e_0 и e_4 до прямых e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3 можно определить как отношения определителей третьего порядка

$$\xi_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_0 \\ y_2 & y_3 & y_0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}; \quad \xi_2 = \frac{\begin{vmatrix} x_3 & x_1 & x_0 \\ y_3 & y_1 & y_0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3 & x_1 & x_4 \\ y_3 & y_1 & y_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}; \quad \xi_3 = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_0 \\ y_1 & y_2 & y_0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}. \quad (2.31)$$

Формулам (2.31) может быть дана пространственная интерпретация.

Рассмотрим связку векторов r_0, r_1, r_2, r_3, r_4 совместно с пространственной системой координат (X, Y, Z) , (рис.2.14). Векторы берут начало в некоторой точке $S(x_s, y_s, z_s)$, не лежащей в плоскости Π , концы векторов определяются точками плоскости Π . Пусть векторы r_i ($i = 1, 2, 3, 4$) будут базисными векторами. Тогда для проективных координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 точки e_0 плоскости Π будут иметь место следующие выражения.

$$\xi_1 = \frac{r_2 r_3 r_0}{r_2 r_3 r_4}; \quad \xi_2 = \frac{r_3 r_1 r_0}{r_3 r_1 r_4}; \quad \xi_3 = \frac{r_1 r_2 r_0}{r_1 r_2 r_4}. \quad (1.32)$$

В выражениях (2.32) в числителе и знаменателе суть смешанные произведения, составленные из векторов r_0, r_1, r_2, r_3, r_4 . Чтобы знаменатели в (2.32) были отличны от нуля, три вектора, составляющие его, не должны быть компланарными.

Формулы (2.32) интересны тем, что модули первых трех векторов, т.е. r_1, r_2, r_3 , сокращаются, так как они содержатся как в числителе, так и в знаменателе. Поэтому, координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 можно назвать инвариантными относительно модулей этих векторов [62].

Смешанные произведения векторов в (2.32) можно записать при помощи определителей третьего порядка. Путем элементарных преобразований определителей исключаются координаты центра проекции и выражения (2.32) приводятся к виду (2.31).

Анализ векторных равенств (2.32) позволяет сделать вывод о том, что проективные координаты не зависят от выбора начала S векторов r_0, r_1, r_2, r_3, r_4 вне плоскости Π и выбора системы координат.

Естественным образом будем считать векторы r_0, r_1, r_2, r_3, r_4 за однородные векторы, которым соответствуют тройки чисел (x, y, z) , где $z = \text{const}$, например, 1,

$$r_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4. \quad (2.33)$$

В практике обработки снимков измеренные координаты изображений x_i, y_i точек дополняют третьей координатой $z=1$ и тройку чисел считают за векторы (1.34), из которых строятся проективные координаты. Заменяя в проективных координатах (2.33) вектор r_0 последовательно векторами r_1, r_2, r_3, r_4 , получим соответственно четыре тройки координат $(\xi_1, 0, 0), (0, \xi_2, 0), (0, 0, \xi_3)$ и $(1, 1, 1)$. Этим координатам соответствуют четыре точки (рис.2.14), из которых три первые - базисные, а четвертая - единичная.

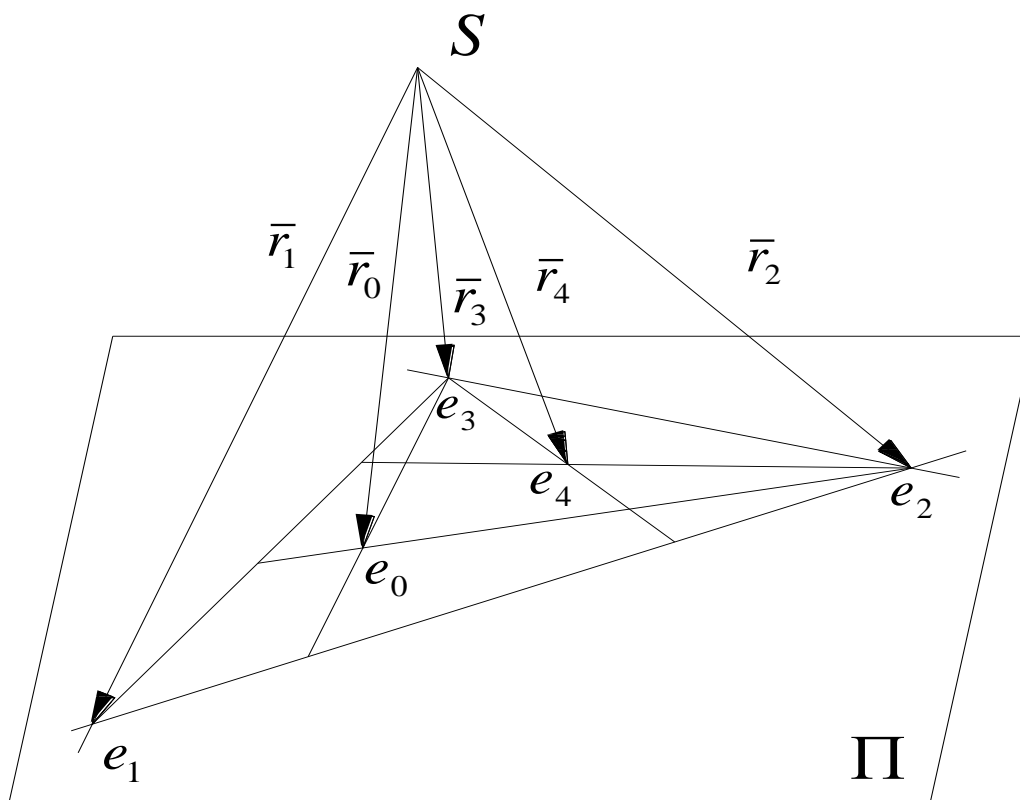


Рис.2.14 Векторная интерпретация проективных координат

Сравнение формул (2.32) для проективных координат с формулами двойного отношения четырех плоскостей пучка позволяет установить следующие зависимости:

$$\gamma_1 = \frac{\xi_2}{\xi_3}; \quad \gamma_2 = \frac{\xi_1}{\xi_3}; \quad \gamma_3 = \frac{\xi_1}{\xi_2}. \quad (2.34)$$

Такова связь между однородными проективными координатами точки плоскости и двойным (ангармоническим) отношением.

2.6. Определение сферических координат объекта с использованием векторной интерпретации проективных координат.

Способ Ю.М. Трунина.

Способ обработки снимков звездного неба, основанный на векторной интерпретации проективных координат, был предложен Ю.М. Труниным.

Пусть в инерциальной (квазиинерциальной) системе координат по данным звездного каталога и в результате вычислений получены видимые координаты опорных звезд (рис. 2.15). Число таких опорных звезд для одного снимка (астронегатива) должно быть четыре. Поскольку проективная система координат задается именно 4 точками. Составим 4-е единичных вектора, определяющих направления на эти опорные звезды:

$$\bar{R}_m^0 = \begin{bmatrix} L_m \\ M_m \\ N_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha'_m \cdot \cos \delta'_m \\ \sin \alpha'_m \cdot \cos \delta'_m \\ \sin \delta'_m \end{bmatrix}, m = 1, 2, 3, 4. \quad (2.35)$$

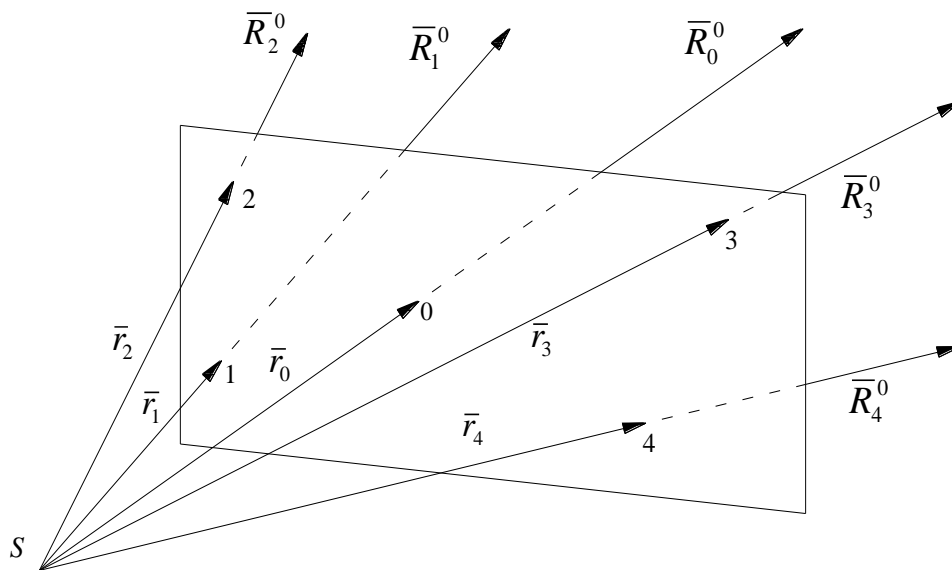


Рис. 2.15. Снимок звездного неба.

Пусть на снимке измерены координаты изображений этих опорных звезд и определяемого объекта. Из них можно составить однородные векторы изображений:

$$r_m = \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ 1 \end{bmatrix}; m = 1, 2, 3, 4; \quad r_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

В соответствии с вышеизложенной теорией проективных преобразований этих данных достаточно для определения направления \vec{R}^0 на объект:

$$\vec{R}^0 = \vec{R}_2^0 \vec{R}_3^0 \vec{R}_4^0 \cdot \xi_1 \cdot \vec{R}_1^0 + \vec{R}_3^0 \vec{R}_1^0 \vec{R}_4^0 \cdot \xi_2 \cdot \vec{R}_2^0 + \vec{R}_1^0 \vec{R}_2^0 \vec{R}_4^0 \cdot \xi_3 \cdot \vec{R}_3^0, \quad (2.37)$$

или

$$\vec{R}^0 = A_1 \cdot \xi_1 \cdot \vec{R}_1^0 + A_2 \cdot \xi_2 \cdot \vec{R}_2^0 + A_3 \cdot \xi_3 \cdot \vec{R}_3^0, \quad (2.38)$$

где A_1, A_2, A_3 -- смешанные произведения единичных векторов опорных звезд

$$A_1 = \vec{R}_2^0 \vec{R}_3^0 \vec{R}_4^0, A_2 = \vec{R}_3^0 \vec{R}_1^0 \vec{R}_4^0, A_3 = \vec{R}_1^0 \vec{R}_2^0 \vec{R}_4^0, \quad (2.39)$$

ξ_1, ξ_2, ξ_3 -- проективные координаты

$$\xi_1 = \frac{\vec{r}_2 \vec{r}_3 \vec{r}_0}{\vec{r}_2 \vec{r}_3 \vec{r}_4}; \quad \xi_2 = \frac{\vec{r}_3 \vec{r}_1 \vec{r}_0}{\vec{r}_3 \vec{r}_1 \vec{r}_4}; \quad \xi_3 = \frac{\vec{r}_1 \vec{r}_2 \vec{r}_0}{\vec{r}_1 \vec{r}_2 \vec{r}_4}. \quad (2.40)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Блажко С.Н. Курс практической астрономии. - М.: Наука, 1979, 432 с.
2. Богуславская Е.Я. Фотографическая астрометрия.- М.-Л.: Гостехиздат, 1974, 342 с.
3. Безменов В.М. Алгоритмы уравнительных вычислений при проективных преобразованиях астронегатива //Изв.вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1991, - N 3, - с.64-73.
4. Безменов В.М. Некоторые результаты исследований алгоритмов уравнительных вычислений при проективных преобразованиях астронегативов //Изв.вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1991, - N 6 , с. 84 - 89 .
5. Губанова Е.П. Некоторые результаты исследования проективного метода редукции астронегативов. //Изв.вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1978, - N 3, - с.47-52.
6. Глаголев Н.А. Проективная геометрия. - М.-Л.: ОНТИ, 1963, 344 с.
7. Киселев А.А. Теоретические основы фотографической астрометрии. - М.:Наука, 1989, 264 с.
- 8.Клейн Ф. Высшая геометрия. - М.-Л.: ГОНТИ, 1939, 399 с.
- 9.Урмаев М.С. Космическая фотограмметрия. - М.: Недра, 1989, 279 с.

Лабораторная работа –1.

Прямое определение элементов ориентирования космического снимка

1. Общие указания.

В данной лабораторной работе рассматривается способ прямого определения угловых элементов ориентирования космического снимка -- геометрический способ. Данный способ основан на использовании аппарата алгебры кватернионов и служит для предварительного определения угловых элементов ориентирования.

2. Исходные данные.

Исходные данные -- координаты изображений x, y и сферические координаты звезд α, δ , относящиеся к макетным снимкам с угловыми элементами внешнего ориентирования Ω_i, ω_i, J_i и элементами внутреннего ориентирования: $f = 350,0\text{мм.}$, $x_0 = y_0 = 0$.

Номера вариантов определяются согласно Таблице 1.1

Таблица 1.1

Координаты изображений звезд

№ варианта	х (мм)	у (мм)	№ варианта	х (мм)	у (мм)
1	62.1564 8.7937	89.8003 18.2338	10	65.1048 9.0074	94.0670 24.0366
2	59.0466 7.9472	98.4667 24.6630	11	63.4532 8.5865	95.1889 24.1902
3	55.6460 6.8780	107.1095 31.0881	12	61.7822 8.1630	96.2818 24.3364

4	65.2526	87.5764	13	60.0925	97.3454
	9.4247	17.9158		7.7371	24.4751
5	62.4471	96.3460	14	58.3844	98.3793
	8.8031	24.3707		7.3087	24.6064
6	60.3591	90.8447	15	56.9886	99.4357
	8.2612	18.3675		7.1966	24.7669
7	30.9790	105.6947	16	55.5742	100.4674
	3.7944	20.5786		7.0817	24.9254
8	54.5870	100.2930	17	53.8123	101.4220
	6.1286	24.7988		6.6456	25.0452
9	54.3240	106.8973	18	55.2445	100.4151
	5.6034	30.9331		6.7633	24.8887

Таблица 1.2

Сферические координаты опорных звезд

№ звезды	α			δ		
	<i>градусы</i>	<i>минуты</i>	<i>секунды</i>	<i>градусы</i>	<i>минуты</i>	<i>секунды</i>
10	1	47	7.4334	-1	17	42.5526
20	1	27	49.1316	-1	32	19.9080

3. Порядок выполнения работы. Вычислительные формулы.

При рассмотрении порядка выполнения лабораторной работы используется контрольный пример со следующими исходными данными:

Таблица 1.3

**Сферические координаты опорных звезд
контрольного примера**

№	х	у	α			δ		
			часы	минуты	секунды	градусы	минуты	секунды
1	17.1418	38.2142	17	09	39.32	-60	19	07.02
2	28.1070	6.2317	17	05	41.45	-51	15	07.86

Чтобы определить угловые элементы ориентирования снимка, нужно использовать следующий алгоритм.

3.1. Направление оси первого вращения $\vec{c}^0 = [c_1 \ c_2 \ c_3]^T$

представим в виде векторного произведения единичных векторов направлений на первую опорную звезду в системе координат снимка

$\vec{r}_1^0 = [l_1 \ m_1 \ n_1]^T$ и в инерциальной системе координат

$\vec{R}_1^0 = [L_1 \ M_1 \ N_1]^T$.

Угол поворота Θ_1 пространства определится из скалярного произведения векторов \vec{r}_1^0 и \vec{R}_1^0 :

$$\Theta_1 = \arccos(\vec{r}_1^0 \vec{R}_1^0)$$

или в координатной форме

$$\Theta_1 = \arccos(l_1 L_1 + m_1 M_1 + n_1 N_1)$$

Направление оси вращения \vec{c}^0 представим в виде векторного произведения векторов \vec{r}_1^0 и \vec{R}_1^0 :

$$\vec{c}^0 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin \Theta_1} \begin{bmatrix} i & j & k \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ L_1 & M_1 & N_1 \end{bmatrix},$$

т.е.

$$c_1 = \frac{N_1 m_1 - M_1 n_1}{\sin \Theta_1}; \quad c_2 = \frac{L_1 n_1 - N_1 l_1}{\sin \Theta_1}; \quad c_3 = \frac{M_1 l_1 - L_1 m_1}{\sin \Theta_1},$$

Причем

$$\sin \Theta_1 = \sqrt{(N_1 m_1 - M_1 n_1)^2 + (L_1 n_1 - N_1 l_1)^2 + (M_1 l_1 - L_1 m_1)^2}.$$

3.2. Первому повороту соответствует кватернион:

$$\Theta_1 = (A_1 + c_1 i + c_2 j + c_3 k),$$

где $A_1 = \operatorname{ctg}(\Theta_1 / 2) = +2,6897813$,

а норма кватерниона $N_1 = \operatorname{Co} \sec(\Theta_1 / 2) = 2,8696556$. При этом

нормированный кватернион q_1 будет следующим:

$$q_1 = 9,373185 \cdot 10^{-1} - 3,3552299 \cdot 10^{-1} i + 9,354641 \cdot 10^{-1} j - 1,0364922 \cdot 10^{-2} k.$$

3.3. Второму повороту соответствует кватернион:

$$\Theta_2 = (A_2 + L_1 i + M_1 j + N_1 k),$$

где $A_2 = \operatorname{ctg}(\Theta_2 / 2) = -3,1350099$,

а норма кватерниона $N_2 = \operatorname{Co} \sec(\Theta_2 / 2) = 3,2906348$. При этом

нормированный кватернион q_2 будет следующим:

$$q_2 = -9,5270631 \cdot 10^{-1} + 3,2790859 \cdot 10^{-2} i + 1,4686435 \cdot 10^{-1} j + 2,640196 \cdot 10^{-1} k.$$

Вычислим координаты второй звезды в ИСК.

3.4. Выполним в соответствии с правилами кватернионного умножения первое преобразование:

$$\bar{R}_2^{0/} = q_1 \bar{r}_2^0 q_1^{-1} = \begin{pmatrix} -5,1654364 \cdot 10^{-2} \\ -6,0936072 \cdot 10^{-1} \\ -7,9120883 \cdot 10^{-1} \end{pmatrix},$$

в результате получим вектор $\bar{R}_2^{0/}$ в промежуточной системе координат.

3.5. Умножив кватернионно этот вектор на кватернион q_2 , найдем вектор второй звезды в ИСК.

$$\bar{R}_0^2 = q\bar{R}_2^{0/}q^{-1} = q_2q_1\bar{r}_2^0q^{-1}q^{-1} = \begin{pmatrix} -1,4693278 \cdot 10^{-1} \\ -6,0840283 \cdot 10^{-1} \\ -7,7990828 \cdot 10^{-1} \end{pmatrix}.$$

Сравнивая результат второго умножения с исходными данными, констатируем их совпадение.

3.6. Умножение q_2q_1 по правилу (1.11) определяет значение кватерниона q , осуществляющего ортогональное преобразование:

$$q = q_2q_1 = -8,929927 \cdot 10^{-1} + 3,2417002 \cdot 10^{-1}i - 3,970818 \cdot 10^{-2}j + 3,0968909 \cdot 10^{-1}k$$

3.7. Выразим элементы ортогональной матрицы Π^* по формуле (1.35) через параметры кватерниона q – родригесова форма ортогональной матрицы:

$$\Pi^* = \begin{bmatrix} +8,0503809 \cdot 10^{-1} & +5,2735580 \cdot 10^{-1} & +2,7170208 \cdot 10^{-1} \\ -5,7884460 \cdot 10^{-1} & +5,9801917 \cdot 10^{-1} & +5,5436854 \cdot 10^{-1} \\ +1,2986562 \cdot 10^{-1} & -6,0355730 \cdot 10^{-1} & +7,8668036 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}.$$

3.8. Определим по формулам (8) углы ориентирования снимка (углы Эйлера (Ω, I, ω)) через элементы матрицы Π^*

$$\Omega = \arctg\left(-\frac{p_{31}}{p_{32}}\right), J = \arccos(p_{33}), \omega = \arctg\left(\frac{p_{13}}{p_{23}}\right).$$

Контрольная работа –2.

Определение сферических координат объекта из обработки снимка звездного неба

1. Общие указания.

Определение сферических координат объекта выполняется с использованием прямого метода – метода Ю.М. Трунина, основанного на векторной интерпретации проективных координат.

Номера вариантов определяются согласно Таблице 2.1.

Таблица 2.1

Варианты задания

Измерение - 1		Измерение - 2	
Номер варианта	Опорные звезды	Номер варианта	Опорные звезды
1	1,2,18,14	9	1,2,18,14
2	3,7,20,17	10	3,7,20,17
3	6,5,11,13	11	6,5,11,13
4	9,17,15,10	12	9,17,15,10
5	9,11,13,10	13	9,11,13,10
6	1,2,18,17	14	1,2,18,17
7	3,7,15,14	15	3,7,15,14
8	6,5,12,20	16	6,5,12,20

При выполнении работы необходимо учесть следующие нелинейные искажающие факторы: радиальную дисторсию, дифференциальную рефракцию аберрацию, собственные движения звезд.

При вычислении поправок за дифференциальную рефракцию,

дифференциальную абберацию и дисторсию в качестве номинальных значений координат главной точки снимка принять значения, приведенные в приложении к Таблице 2.

Поправки за дисторсию децентрации не вычисляются.

2. Исходные данные

Основой для выполнения лабораторной работы являются результаты весьма тщательных измерений снимка звездного неба. Исследуемым объектом является Плутон, изображение которого находится вблизи главной точки снимка. Наблюдательный материал получен на широкоугольном астрографе, имеющем следующие основные характеристики: фокусное расстояние $f = 2300$ мм, диаметр объектива $D = 230$ мм, поле зрения $2\omega = 6^\circ \times 6^\circ$, масштаб $M = 90''/\text{мм}$, коэффициент радиальной (Гауссовой) дисторсии $K_1 = +0.44 \times 10^{-8} \text{ мм}^{-2}$. Снимок измерялся дважды: после первого измерения снимок разворачивался на 180° . Результаты измерений представлены в Табл. 2.2.

Экваториальные координаты опорных звёзд и их собственные движения выбраны соответственно из каталога AGK3R и AGK3RN. Значения экваториальных координат опорных звёзд и их собственные движения приведены в Табл.3.

Расположение опорных звёзд и исследуемого объекта (Плутона) показано на Рис.1.

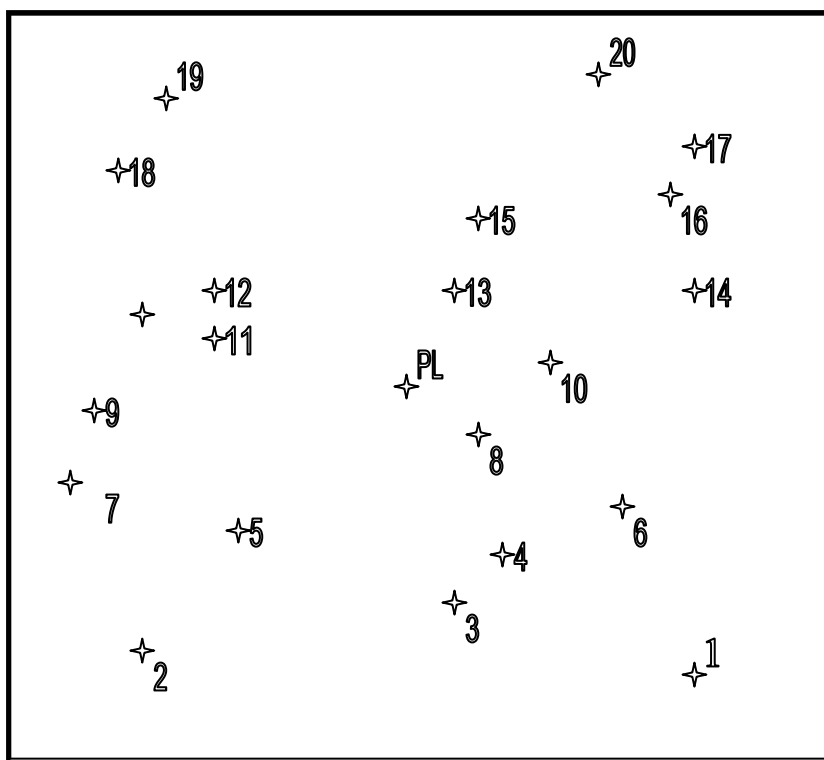


Рис.1. Расположение опорных звезд и определяемого объекта (Плутона),
на снимке звездного неба

Таблица 2.2

**Измеренные координаты изображений опорных звёзд
и объекта (Плутон)**

Номер звезды	В Д	Измерение - 1		Измерение - 2	
		Х мм.	У мм.	Х мм.	У мм.
1	+01 3018	588.6650	109.9109	408.9007	287.7287
2	- 02 3937	588.0554	272.8459	410.1135	124.8026
3	- 00 2921	578.4545	182.0308	419.3831	215.6427
4	- 00 2923	566.2952	175.7015	431.5079	222.0131
5	- 01 3020	552.5332	237.9512	445.5040	159.8190
6	+00 3304	548.1926	144.6182	449.4979	253.1687
7	- 03 3730	541.7933	296.5492	456.4603	101.2578
8	- 00 2936	522.6258	181.1656	475.2014	216.7056
9	- 03 3740	511.8495	289.0167	486.3749	108.9044
10	+00 3318	495.9718	161.2769	501.7846	236.7038
11	- 01 3035	482.5553	242.9423	515.4927	155.0827
12	- 01 3041	472.8403	242.8920	525.2115	155.1695
13	- 00 2946	471.0242	193.1380	526.8435	204.9228
14	+01 3052	462.0989	114.0900	535.4748	284.0073
15	- 00 2948	445.4292	185.6414	552.4131	212.5107
16	+01 3057	440.9345	113.6798	556.6465	284.4941
17	+01 3059	438.0628	108.4260	559.4964	289.7527
18	+01 3972	435.9561	258.5274	562.1528	139.6679
19	- 01 3047	414.4459	243.0668	583.6075	155.2073
20	+00 3348	410.7497	155.5384	586.9804	242.7496
PL		498.4684	198.5860	499.4225	199.3807

Примечания:

Дата наблюдений: 16 мая 1990 г.; UTC = 18^h 43^m - 19^h 13^m.

Координаты места наблюдения: $\varphi = +38^{\circ}41',3$;

$$\lambda = 4^h 27^m 36^s;$$

$$h = 2800 \text{ м.}$$

Координаты центра фотографирования: $\alpha_y = 15 \text{ } 10$; $\delta_y = -1 \text{ } 10$.

Коэффициент дисторсии: $K_1 = +0.44 \times 10^{-8} \text{ мм}^{-2}$.

Координаты центра фотографирования:

измерение 1 - $x_0 = 498,4684$; $y_0 = 198,5860$;

измерение 2 - $x_0 = 499,4225$; $y_0 = 199,3806 \text{ мм}$.

Таблица 2.3.

**Значения экваториальных координат опорных звёзд на снимке с изображением
планеты Плутон**

№	В Д	m_{pq}	S_p	α 1950.0 AGK3R	δ 1950.0 AGK3R	$\mu_\alpha/100$ AGK3RN	$\mu_\delta/100$ AGK3RN	Эпоха наблюдения	
								α	δ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	+01 3018	7.0	KO	15 ^h 00 ^m 49 ^s .496	+1 ^o 05 05.72	-0 ^s .059	-0 ^{''} .64	1958.83	1958.17
2	-02 3937	8.6	A2	15 ^h 00 ^m 52 ^s .282	-2 ^o 58 23.94	-0 ^s .326	-3 ^{''} .59	58.65	58.63
3	-00 2921	8.0	AO	15 01 50.015	-0 42 40.85	+0.090	-0. 23	58.14	57.99
4	-00 2923	8.9	KO	15 03 02.776	-0 33 13.53	-0.138	+0.99	59.35	59.36
5	-01 3020	8.4	K2	15 04 24.830	-2 06 20.96	-0.096	+0.33	58.32	58.28
6	+00 3304	7.9	KO	15 04 51.127	0 13 14.48	-0.008	+0.53	58.97	58.87
7	-03 3730	7.6	K2	15 05 28.986	-3 33 57.50	-0.228	+0.53	58.39	58.46
8	-00 2936	7.6	FO	15 07 24.015	-0 41 25.93	-0.385	-0.68	57.89	57.89
9	-03 3740	8.6	F5	15 08 28.188	-3 22 43.88	+0.254	-0.59	57.70	57.81
10	+00 3318	7.5	K5	15 10 03.461	-0 11 40.86	+0.022	-1.39	58.06	57.93
11	-01 3035	9.1	K5	15 11 23.809	-2 13 52.07	-0.277	-0.85	58.62	58.86
12	-01 3041	7.9	M3	15 12 21.897	-2 13 46.61	-0.038	-3.15	58.36	58.48
13	-00 2946	8.3	AO	15 12 32.756	-0 59 21.08	-0.191	-2.34	59.14	59.48
14	+01 3052	7.2	KO	15 13 25. 88	+0 58 54.22	+1.199	-14.83	59.03	59.82
15	-00 2948	7.2	G5	15 15 05.948	-0 48 10.05	-0.206	-0.19	58.43	58.42
16	+01 3057	9.0	K	15 15 32.692	+0 59 26.12	-0.245	-1.27	59.05	59.18
17	+01 3059	7.0	KO	15 15 49.676	+1 07 16.31	+0.218	-2.50	58.36	58.53
18	-02 3972	8.0	F8	15 16 02.626	-2 37 07.25	+0.267	-5.86	58.43	58.12
19	-01 3047	6.4	K2	15 18 11.892	-2 13 55.11	-1.766	-18.08	58.32	58.01
20	+00 3348	8.4	G5	15 18 33.066	-0 03 07.71	+0.134	-1.93	58.41	58.63

3. Порядок выполнения работы. Вычислительные формулы.

3.1. Учет дифференциальной рефракции и аберрации:

Дифференциальная рефракция и дифференциальная аберрация вызывают изменение взаимного расположения звёзд в поле изображения. При этом величина смещения зависит от зенитного расстояния и от расположения светил относительно апекса.

Поправки за действие дифференциальной рефракции и аберрации в непосредственно измеренные координаты изображений звёзд необходимо получить, используя следующие формулы [10]:

$$\Delta x_i^{(1)} = -\frac{k}{F} Z_1 \left[(1 + Z_1^2) \bar{x}_i^2 + 2Z_1 Z_2 \bar{x}_i \bar{y}_i + (1 + Z_2^2) \bar{y}_i^2 \right],$$

$$\Delta y_i^{(1)} = -\frac{k}{F} Z_2 \left[(1 + Z_2^2) \bar{y}_i^2 + 2Z_1 Z_2 \bar{x}_i \bar{y}_i + (1 + Z_1^2) \bar{x}_i^2 \right]$$

В выражениях и приняты следующие обозначения: $\bar{x}_i = x_i - x_T$, $\bar{y}_i = y_i - y_T$ - координаты изображения звезды, отнесенные к главной точке снимка; F - фокусное расстояние съёмочной камеры; k - коэффициент рефракции; $Z_1 = \operatorname{tg} z_0 \sin q$, $Z_2 = \operatorname{tg} z_0 \cos q$, где z_0 - зенитное расстояние оптического центра; q - параллактический угол.

3.2. Учет дисторсии:

Поправки за совместное влияние радиальной дисторсии и дисторсии децентрации в координаты изображений определить по формулам

Д.Брауна :

$$\Delta x_i^{(2)} = \bar{x}_i (K_1 r_i^2 + K_2 r_i^4 + \dots) + [P_1 (r_i^2 + 2\bar{x}_i^2) + 2P_2 \bar{x}_i \bar{y}_i] \cdot [1 + P_3 r_i^2 + \dots]$$

$$\Delta y_i^{(2)} = \bar{y}_i (K_1 r_i^2 + K_2 r_i^4 + \dots) + [2P_1 \bar{x}_i \bar{y}_i + P_2 (r_i^2 + 2\bar{y}_i^2)] \cdot [1 + P_3 r_i^2 + \dots]$$

где K_1, K_2, \dots - коэффициенты радиальной дисторсии; J_1, J_2, \dots - коэффициенты дисторсии децентрации; \bar{x}_i, \bar{y}_i - координаты изображения звезды, отнесенные к главной точке снимка; $r_i = (\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2)^{1/2}$ - расстояние до изображения звезды. Величины P_1, P_2 , являются функциями от параметров дисторсии децентрации

$$P_1 = J_1 \frac{\bar{x}_i}{r_i}; \quad P_2 = J_2 \frac{\bar{y}_i}{r_i}; \quad P_3 = J_2/J_1.$$

3.3. Формирование однородных векторов изображений опорных звезд и определяемого объекта:

$$\bar{r}_m = \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ 1 \end{bmatrix}; m = 1, 2, 3, 4; \quad \bar{r}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3.4. Вычисление проективных координат -- ξ_1, ξ_2, ξ_3 :

Вычисление проективных координат осуществляется с использованием однородных векторов изображений опорных звезд и определяемого объекта.

$$\xi_1 = \frac{r_2 r_3 r_0}{r_2 r_3 r_4}; \quad \xi_2 = \frac{r_3 r_1 r_0}{r_3 r_1 r_4}; \quad \xi_3 = \frac{r_1 r_2 r_0}{r_1 r_2 r_4}.$$

3.5. Учет собственных движений звезд:

Исправляют координаты опорных звезд за собственное движение:

$$\alpha' = \alpha_0 + \mu_\alpha (t_i - T_0) \\ \delta' = \delta_0 + \mu_\delta (t_i - T_0).$$

Здесь μ_α и μ_δ -- соответственно собственное движение звезды по прямому восхождению и склонению. Сферические координаты α_0 и δ_0 --

средние экваториальные координаты звезды, заданные на эпоху каталога T_0 , момент времени t_i -- момент фотографирования.

3.6. Вычисление единичных векторов направлений на опорные звезды:

Вычисляют компоненты единичного вектора \vec{R}_m^0 направления на опорную звезду в средней системе координат эпохи T_0 , исправленные за собственные движения звезды:

$$\vec{R}_m^0 = \begin{bmatrix} L_m \\ M_m \\ N_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha'_m \cdot \cos \delta'_m \\ \sin \alpha'_m \cdot \cos \delta'_m \\ \sin \delta'_m \end{bmatrix}, m = 1, 2, 3, 4.$$

3.7 . Вычисление смешанных произведений векторов направлений на опорные звезды:

$$A_1 = \vec{R}_2^0 \vec{R}_3^0 \vec{R}_4^0, A_2 = \vec{R}_3^0 \vec{R}_1^0 \vec{R}_4^0, A_3 = \vec{R}_1^0 \vec{R}_2^0 \vec{R}_4^0.$$

3.8. Вычисление направления на объект по формуле Ю.М. Трунина:

$$\vec{R}^0 = A_1 \cdot \xi_1 \cdot \vec{R}_1^0 + A_2 \cdot \xi_2 \cdot \vec{R}_2^0 + A_3 \cdot \xi_3 \cdot \vec{R}_3^0.$$

3.9. Вычисление сферических координат объекта:

$$\alpha = \arctg \frac{M}{L}, \delta = \arctg \frac{N}{\sqrt{M^2 + L^2}}.$$